Problemas de Física

Un manual de problemas

Colección manuales uex - 121

Moisés
García Chamorro

María José
Nuevo Sánchez

121

ÍNDICE

PROBLEMAS DE FÍSICA

UN MANUAL DE PROBLEMAS

MANUALES UEX

MOISÉS GARCÍA CHAMORRO
MARÍA JOSÉ NUEVO SÁNCHEZ

PROBLEMAS DE FÍSICA

UN MANUAL DE PROBLEMAS



2023

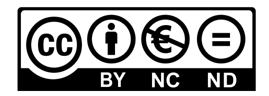


Esta obra ha sido objeto de una doble evaluación, una interna, llevada a cabo por el consejo asesor del Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, y otra externa, efectuada por evaluadores independientes de reconocido prestigio en el campo temático de la misma.

Edita:

Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones
C/ Caldereros, 2 - Planta 3ª. 10071 Cáceres (España)
Tel. 927 257 041; Fax 927 257 046
E-mail: publicac@unex.es
http://www.unex.es/publicaciones

ISSN 1135-870-X
ISBN de méritos 978-84-9127-155-0



PRÓLOGO

Tras varios años impartiendo la asignatura de Física II en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Extremadura, hemos sido conscientes de la necesidad de reunir en un solo compendio los problemas resueltos más relevantes de la asignatura a fin de facilitar su consulta y el aprendizaje de los conceptos y procedimientos fundamentales desarrollados en esta disciplina.

La extensa y variada bibliografía existente para cubrir un primer curso de Física Universitaria en un Grado de Ciencias, unida a la dificultad y al desconocimiento de herramientas matemáticas apropiadas dirige a los estudiantes, en múltiples ocasiones, a una desorientación que los conduce al abandono de la misma, dificultando aún más su compresión y posterior superación. Por esta razón, nuestro principal objetivo se centra en que los estudiantes que cursen la materia de Física II tengan a mano un texto sencillo, adaptado a las exigencias de esta asignatura. Por ello, el volumen se desarrolla siguiendo el esquema de los temas que se imparten en las clases de teoría, dividida en seis capítulos independientes y autoconsistentes, aunque con dos partes bien diferenciadas. La primera parte comprende tres temas referidos a la Física Clásica, estando los tres últimos dedicados a la Física Moderna. Una descripción sucinta de los contenidos de las clases teóricas se expresa a continuación.

En el primer capítulo se revisa el concepto de rotación analizando las analogías y diferencias con el movimiento de traslación, para mejor comprensión. Además, se introducen conceptos nuevos que surgen en este movimiento poniendo énfasis en su importancia y validez en un amplio rango de situaciones, como es el momento angular y su ley de conservación.

La segunda unidad está dedicada al análisis de oscilaciones. Comenzaremos con el concepto básico con ejemplos de la vida cotidiana para irnos adentrando paulatinamente en la descripción matemática de las mismas. En este tema estamos enfocados a que los alumnos asimilen por qué una función sinusoidal describe totalmente un movimiento oscilatorio.

El movimiento oscilatorio analizado en el capítulo anterior es el paso previo para introducir el concepto de onda, como perturbación que se propaga en un medio dando lugar al movimiento ondulatorio. Un concepto cercano, pero diferente que el alumno necesita comprender y diferenciar con claridad.

Las unidades de la segunda parte se encuadran en Física Moderna y corresponden a los temas denominados Orígenes de la Física Cuántica, Introducción a la Física Atómica y, el último de ellos, Física Nuclear. En estas unidades se revisarán de forma cronológica los

principales experimentos que dieron lugar a esta nueva forma de entender la materia y sus implicaciones tanto en la ciencia fundamental como sus múltiples aplicaciones no sólo a campos afines como puedan ser cualquier especialidad de Ingeniería, sino tan diversos como Medicina o Arqueología, entre otros.

En este manual pretendemos agrupar las formas clave y algunos problemas adecuados al nivel que nos ocupa, teniendo en cuenta la escasez de herramientas que algunos alumnos que acceden a estas especialidades poseen. Por ello, al inicio de cada capítulo se hará un pequeño resumen de las nociones y expresiones fundamentales analizadas en las clases teóricas y que servirán de apoyo para la resolución de los ejercicios.

Badajoz. Septiembre de 2022

ÍNDICE GENERAL

ÍN
DI
CE

CAPÍTULO I

ROTACIÓN Y MOMENTO ANGULAR

En este capítulo se abordan problemas de rotación y momento angular. Como es bien sabido, la dinámica de Newton toma formas especiales cuando se aplica a este tipo de sistemas existiendo un paralelismo con las expresiones de la dinámica lineal. En esta introducción no se pretende dar un curso teórico sobre el tema sino que nos limitaremos a presentar una serie de tablas con las ecuaciones más representativas.

Ecuaciones básicas en rotación

Velocidad angular	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$
Aceleración angular	$\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$
Velocidad tangencial	$v = r\omega$
Aceleración tangencial	$a = r\alpha$
Aceleración centrípeta	$a_c = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$

Relación entre magnitudes angulares y lineales

$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Momento de inercia

Sistema de partículas	$I = \sum m_i r_i^2$
Sistema continuo	$I = \int r^2 dm$
Teorema de los ejes paralelos (Steiner)	$I = I_{\text{cm}} + Mh^2$

Energía cinética de rotación

Sobre un eje fijo	$K = \frac{1}{2} I\omega^2$
Objeto rodante	$K = \frac{1}{2} Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}}\omega^2$

Momento de una fuerza (torque)

Definición	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Momento angular

Definición	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
Derivada	$\frac{dL}{dt} = \tau$
Teorema de Conservación	Si $\tau = 0 \rightarrow \frac{dL}{dt} = 0$

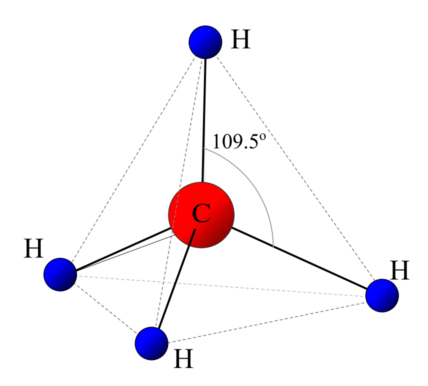
Segunda Ley de Newton (rotación, traslación)

$$\tau_{\text{neto,ext}} = \sum_i \tau_{i,\text{ext}} = I\alpha \qquad F_{\text{neta,ext}} = \sum_i F_i = ma$$

Problemas

1. **La molécula de metano (CH_4) tiene cuatro átomos de hidrógeno situados en los vértices de un tetraedro regular de lado $a = 0,18$ nm, con el átomo de carbono en el centro del tetraedro. Encontrar el momento de inercia de esta molécula para la rotación sobre un eje que pasa por el centro del átomo de carbono y uno de los átomos de hidrógeno.**
Dato: $m_H = 1,67 \times 10^{-27}$ *kg*

SOLUCIÓN

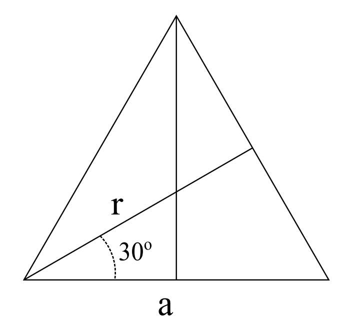


Debido a que el eje de rotación pasa por el átomo de carbono y por uno de los átomos de hidrógeno serán los otros tres átomos de hidrógeno los únicos que contribuirán al momento de inercia. Esto se entiende perfectamente si nos fijamos en la ecuación fundamental del momento de inercia

$$I = \sum_i m_i r_i^2, \tag{1.1}$$

donde r_i son las distancias de los átomos de masa m_i al eje de rotación. Como el eje pasa por el carbono y uno de los hidrógenos sus distancias al eje es nula. Por tanto los únicos átomos a una distancia no nula son los otros tres hidrógenos.

Vamos a suponer que tomamos el eje de rotación de tal manera que sea perpendicular a la base del tetraedro (eje vertical). El problema se reduce entonces a obtener la distancia desde los vértices de un triángulo equilátero de lado conocido a al centro del mismo.



Si dibujamos dos alturas del triángulo vemos que se forma un triángulo rectángulo más pequeño con uno de los catetos $a/2$ y la hipotenusa r, que es la distancia que estamos buscando. Es fácil comprobar que el ángulo que forman es de 30° y con ello podemos obtener r.

$$\cos 30° = (a/2)/r,$$
$$r = \frac{a}{2\cos 30°},$$
$$r = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Así el momento de inercia de los tres átomos simplemente será

$$I = 3m_H r^2 = 3m_H \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = m_H a^2,$$

$$I = (1,67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})(0,18 \times 10^{-9}\ \mathrm{m})^2 = 5,4 \times 10^{-47}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2.$$

¿Cuál sería el momento de inercia en torno a un eje que pasase por dos átomos de hidrógeno? ($m_C = 1,99442 \times 10^{-26}$ kg).

2. **Calcular el momento de inercia de los siguientes sistemas:**

   ***a*) Un cilindro sólido uniforme de masa M, longitud L y radio R en torno a un eje perpendicular a su base y que pasa por el centro.**

   ***b*) Un cilindro hueco uniforme de masa M, longitud L, radio interior R_1 y exterior R_2 en torno a un eje perpendicular a su base y que pasa por el centro.**

SOLUCIÓN

a) Para resolver el problema solo tenemos que aplicar la ecuación general del momento de inercia para sólidos rígidos.

$$I = \int r^2 dm. \tag{2.1}$$

El primer paso es identificar el elemento de masa como $dm = \rho dV$. Aquí el elemento de volumen es conveniente expresarlo en coordenadas polares cilíndricas $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$, por lo tanto,

$$dm = \rho\, r\, dr\, d\theta\, dz, \tag{2.2}$$

donde ρ es la densidad volumétrica del cilindro que vale

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}. \tag{2.3}$$

Podemos entonces separar la integral anterior en tres integrales independientes

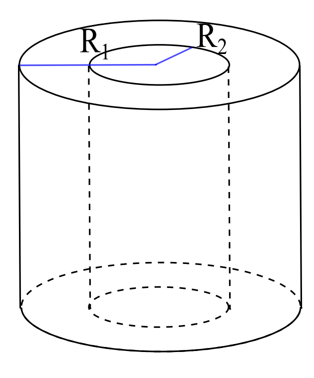
$$I = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz,$$

$$I = \rho \frac{1}{2} \pi R^4 L.$$

Teniendo en cuenta el valor de la densidad dada por (2.3) el resultado final será

$$I = \frac{1}{2} M R^2.$$

Es interesante (y casi contraintuitivo) darse cuenta de que el resultado es independiente de la longitud L del cilindro. Esto quiere decir que el momento de inercia es el mismo para cilindros todo lo largo o corto que se quiera siempre que sean de la misma masa y radio.



b) El desarrollo de este segundo ejercicio es idéntico al primero. Sólo hay que tener en cuenta que en esta ocasión los límites de la integral en r van desde R_1 a R_2 y que la densidad volumétrica es:

$$\rho = \frac{M}{\pi (R_2^2 - R_1^2) L}.$$

Así podemos calcular el momento de inercia como

$$I = \rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz,$$

$$I = \rho \frac{1}{2}\pi(R_2^4 - R_1^4)L = \frac{1}{2}M\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Teniendo en cuenta que

$$(R_2^4 - R_1^4) = (R_2^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2)$$

entonces

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2).$$

Podría pensarse que el momento de inercia de un cilindro hueco sería el momento del cilindro de radio mayor menos el del cilindro de radio menor. Esto es un error muy común entre los estudiantes y conviene corregirlo cuanto antes. ¿Por qué crees que no se obtendría el resultado correcto con este razonamiento?

3. **La densidad de masa de la Tierra, ρ, puede modelizarse como una función de la forma $\rho(r) = C(1{,}22 - r/R)$, donde R es el radio de la Tierra, C es una constante, y la variable r es la distancia al centro de la Tierra. Determinar:**

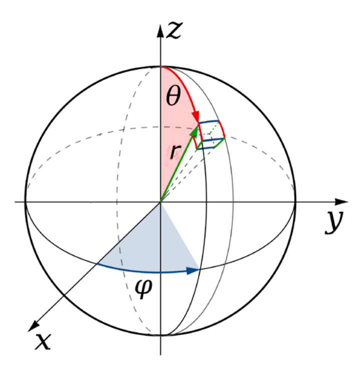
   ***a*) La constante C en función de la masa M y radio R de la Tierra.**

   ***b*) El momento de inercia I de la Tierra.**

SOLUCIÓN

a) Para obtener el valor de la constante C partimos de la expresión de la densidad de masa de la Tierra y la integramos en todo el volumen de la Tierra. Con ello obtenemos el valor de la masa de la Tierra.

$$M = \int \rho dV. \tag{3.1}$$



Al tratarse de una esfera es más conveniente usar coordenadas polares esféricas en lugar de las cartesianas para realizar la integral. El elemento de volumen en este sistema es

$$dV = r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\phi, \qquad (3.2)$$

donde θ y ϕ son los ángulos cenital y azimutal, respectivamente.

Así,

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho(r) \; r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\phi.$$

Como la densidad es sólo función de r las tres integrales que aparecen son separables y por tanto,

$$M = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta \; \int_0^{R} C\left(1{,}22 - \frac{r}{R}\right) \; r^2 \; dr.$$

Integrando cada factor por separado tenemos

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi,$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta = -\cos\theta|_0^{\pi} = 2,$$

$$\int_0^{R} C\left(1{,}22 - \frac{r}{R}\right) \; r^2 \; dr = C\left(\frac{1{,}22}{3} r^3 - \frac{r^4}{4R}\right)\Bigg|_0^R,$$

con lo que la integral completa es

$$M = 4\pi C R^3 \left(\frac{1{,}22}{3} - \frac{1}{4}\right),$$

de donde despejamos la constante C en función de M y R:

$$C = \frac{3}{1{,}88\pi} \frac{M}{R^3} \approx 0{,}507 \frac{M}{R^3}.$$

b) El momento de inercia se obtiene a partir de su definición dada en (2.1) teniendo en cuenta que el elemento de masa es

$$dm = \rho(r) \; dV = C(1{,}22 - r/R) r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\phi,$$

donde, al igual que en el apartado anterior, hemos usado coordenadas polares esféricas.

La integral del momento de inercia queda por tanto

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, \int_0^R C\left(1{,}22 - \frac{r}{R}\right) \, r^4 \, dr,$$

$$I = 4\pi C R^5 \left(\frac{1{,}22}{5} - \frac{1}{6}\right).$$

Introduciendo el valor de la constante C calculado anteriormente obtenemos finalmente

$$I \approx 0{,}49 M R^2.$$

Es llamativo el hecho de que el momento de inercia de la Tierra (considerada como una esfera) con densidad de masa $\rho(r)$ es similar a la de un cilindro o disco uniforme. Esto pone de manifiesto que en el momento de inercia no sólo tiene importancia la forma geométrica del objeto, sino su distribución espacial de masa. En este problema la Tierra está considerada como una esfera de densidad no homogénea, con lo que no tendría el momento de inercia de una esfera homogénea.

4. **Una bola esférica de radio R y masa M se encuentra inicialmente rodando sin rozamiento ni deslizamiento por una superficie horizontal con velocidad $v_{\mathbf{cm}}$. En un punto determinado comienza a subir por un plano inclinado de ángulo θ respecto a la horizontal. Determinar la altura h que alcanzará la bola antes de detenerse en los siguientes casos:**

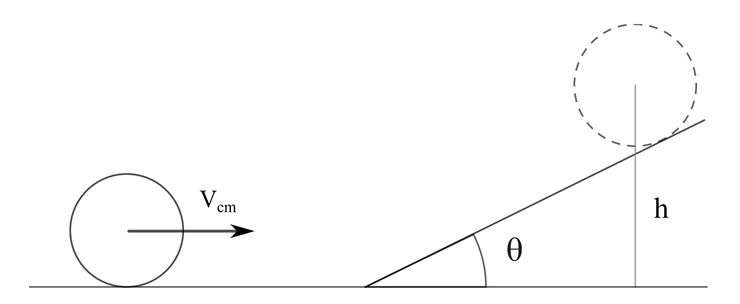
   ***a*) Si la bola es sólida y con densidad constante.**

   ***b*) Si la bola es hueca y toda su masa está uniformemente distribuida en su superficie.**

SOLUCIÓN

Como la bola rueda sin rozamiento se entiende que no existe ninguna fuerza no conservativa, y por tanto, podemos aplicar el teorema de la conservación de la energía mecánica

$$E_i = E_f,$$



$$K_i + U_i = K_f + U_f,$$

siendo K la energía cinética y U potencial.

Hay que tener en cuenta que en el instante inicial la bola se desplaza a la vez que rueda, por lo que su energía cinética tendrá una parte debida al desplazamiento de su centro de masa y otra debida a su movimiento rotacional. Así mismo, su energía potencial respecto del suelo es 0. Por otro lado, en el instante final, cuando ha subido por la rampa, la bola se encuentra en reposo en un punto más elevado que el inicial, por tanto su energía cinética será nula y su potencial $U_f = mgh$. Así la ecuación del balance energético queda

$$K_{\mathrm{cm,i}} + K_{r,i} + 0 = 0 + mgh,$$

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh.$$

Ya que la bola rueda sin deslizamiento podemos aplicar la condición de rodadura que establece que $\omega = v_{\mathrm{cm}}/R$ con lo que la anterior expresión se transforma en

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_{\mathrm{cm}}^2}{R^2} = mgh.$$

De aquí podemos despejar la altura que alcanza la bola en la rampa:

$$h = \frac{v_{\mathrm{cm}}^2}{2g}\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right),$$

que es la expresión general de la altura en función del momento de inercia de la bola.

En los casos particulares del problema, esto es, una bola sólida y otra hueca, tenemos que los momentos de inercia son $I_{\mathrm{solida}} = \frac{2}{5}mR^2$ y

$I_{\rm hueca} = \frac{2}{3}mR^2$ con lo que

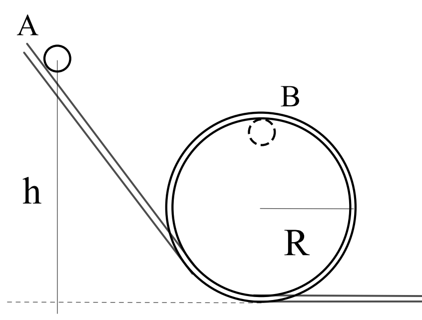
$$h_{\rm solida} = \frac{7}{10}\frac{v_{\rm cm}^2}{g} \qquad \text{y} \qquad h_{\rm hueca} = \frac{5}{6}\frac{v_{\rm cm}^2}{g}.$$

Podemos sacar varias conclusiones interesantes de estos resultados. En primer lugar se puede observar que la bola que más altura alcanza será la hueca aún siendo las dos bolas de la misma masa y radio ya que $5/6 > 7/10$. *Esto pone de manifiesto la extraordinaria importancia de la distribución de la masa en la dinámica de los sistemas, introducida aquí en los momentos de inercia, aunque la forma y la masa total de los objetos sean idénticas.*

Otra importante conclusión es que la altura es independiente del ángulo θ que forma la rampa respecto a la horizontal. Esto es una consecuencia directa del teorema de conservación de la energía. En un campo conservativo, la energía potencial de un objeto que se mueva en él depende únicamente del punto inicial y final (en este caso, de la diferencia de alturas) sin importar el recorrido entre los dos puntos.

5. **Una bola esférica de radio r y masa m se desliza sin rozamiento por una vía en forma de bucle de radio R desde una altura h. Determinar esta altura mínima para que la bola nunca abandone la vía en la parte superior del bucle. ¿Cuál será esta altura si la bola rueda sin deslizar?**

SOLUCIÓN



Para que la bola no se despegue de la vía en la parte superior del bucle (punto B) debe ocurrir que la fuerza centrífuga compense el peso de la bola

$$mg = \frac{mv^2}{R},$$

de lo que se deduce que

$$v^2 = gR.$$

Por otra parte, dado que la única fuerza presente es la gravedad, ya que no hay rozamiento, se verifica el teorema de la conservación de la

energía. Por lo tanto, la energía de la bola en el instante inicial debe ser la misma que cuando pasa por el punto más alto del bucle. Así

$$mgh_A = mgh_B + \frac{1}{2}mv^2,$$

$$gh_A = g2R + \frac{1}{2}gR,$$

con lo que se llega a

$$h_A = \frac{5}{2}R.$$

En el segundo caso, cuando la bola rueda sin deslizar, hay que tener en cuenta la contribución rotacional a la energía cinética:

$$mgh_A = mgh_B + \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Como la bola rueda sin deslizar se verifica $\omega = v_{\text{cm}}/r$, e introduciendo el momento de la esfera $I = \frac{2}{5}mR^2$ se llega a

$$h_A = 2R + \frac{1}{2}R + \frac{1}{5}R = \frac{27}{10}R.$$

Es interesante darse cuenta de que la altura necesaria cuando la bola rueda es mayor que cuando desliza. Esto se debe a que cuando la bola rueda la energía potencial inicial debe repartirse en más grados de libertad (cinética más rotacional).

6. **En el laboratorio tenemos un disco de masa m_i y radio R de hielo seco (CO_2) sobre un torno sin rozamiento girando con una velocidad angular ω_i. Pasado un tiempo, cierta cantidad de CO_2 se ha perdido por sublimación quedando una masa $m_f < m_i$. Determinar la nueva velocidad angular ω_f. ¿Será mayor o menor que la velocidad inicial? ¿Se conserva la energía mecánica?**

SOLUCIÓN

Sobre este sistema no actúa ningún momento de fuerza (torque) y por lo tanto el momento angular debe conservarse, ya que

$$\tau = \frac{dL}{dt} = 0, \qquad (6.1)$$

y así $L_i = L_f$. Se tratará, por tanto, de usar este principio de conservación para obtener la velocidad angular final ω_f.

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f, \tag{6.2}$$

donde $I = \frac{1}{2}mR^2$ (momento de inercia de un cilindro sólido). Sustituyendo este momento de inercia en la ecuación anterior

$$\frac{1}{2}m_iR^2\omega_i = \frac{1}{2}m_fR^2\omega_f,$$

$$\omega_f = \frac{m_i}{m_f}\omega_i.$$

De aquí se puede deducir que si $m_f < m_i$ entonces $\omega_f > \omega_i$.

En la segunda parte del problema tenemos que verificar si se conserva la energía mecánica. Sobre el sistema no actúa ninguna fuerza conservativa por lo que no existirá energía potencial. La variación de energía mecánica será únicamente debida a la cinética:

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_f - E_i\\ &= \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_i\omega_i^2\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_fR^2\right)\omega_f^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_iR^2\right)\omega_i^2\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_iR^2\right)\left(\frac{m_f}{m_i}\omega_f^2 - \omega_i^2\right)\\ &= \frac{1}{2}I_i\omega_i^2\left(\frac{m_i}{m_f} - 1\right)\\ &= E_i\left(\frac{m_i}{m_f} - 1\right).\end{aligned}$$

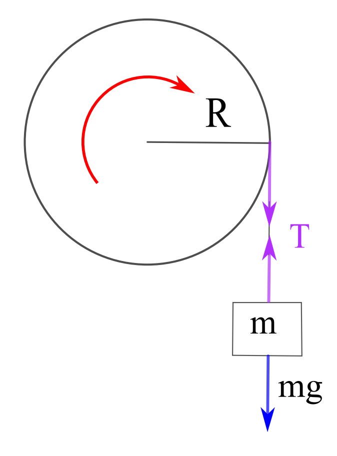
De aquí se deduce entonces que si $m_i \neq m_f$ entonces $\Delta E \neq 0$ y por tanto en este sistema la energía no se conserva. Es más, la energía **aumenta**. *¿Cómo puede ocurrir esto? ¿De dónde viene esa energía?*

7. Se sujeta un objeto de masa m a una cuerda ligera (masa despreciable) alrededor de una rueda de momento de inercia I y radio R. La rueda puede girar sin rozamiento y la cuerda no desliza por su borde. Hallar la tensión de la cuerda y la

aceleración del cuerpo. ¿Y si la cuerda se enrolla en una esfera uniforme?

SOLUCIÓN

Para resolver el problema debemos aplicar la 2ª Ley de Newton a cada uno de los subsistemas, a saber, el objeto que cuelga y la rueda que gira. Es necesario darse cuenta de que el único momento de fuerza (torque) aplicado sobre la rueda es debido a la tensión de la cuerda.



Por tanto, eligiendo como sentido positivo el de las manecillas del reloj:

$$ma = mg - T, \qquad (7.1)$$

$$\tau = TR = I\alpha. \qquad (7.2)$$

No tenemos más que despejar la tensión de (7.1) y usarla en (7.2),

$$m(g-a)R = I\alpha.$$

Dado que la cuerda no desliza sobre la rueda puede aplicarse la condición de rodadura, $a = R\alpha$, y la aceleración es:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}.$$

La tensión la obtenemos sin más que sustituir el valor de esta aceleración en (7.1), teniendo en cuenta de nuevo la condición de rodadura.

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}.$$

En el caso de la esfera sólo debemos tener en cuenta ahora que su momento de inercia es $I = \frac{2}{5}MR^2$ y se llega a:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{2}{5}\frac{M}{m}},$$

y la tensión será:

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{5}{2}\frac{m}{M}}.$$

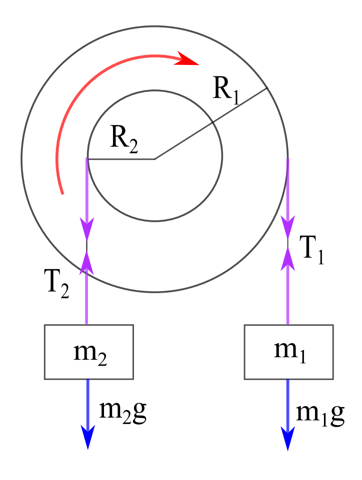
Es interesante darse cuenta de que sea cual sea la masa, el radio o el momento de inercia, la aceleración resultante a va ser siempre menor que g. Lo mismo ocurre con la tensión T, que será siempre menor que el peso del objeto colgado mg. Esto se debe a que tanto la masa como el radio y el momento de inercia son siempre positivos y por tanto el denominador siempre > 1.

8. Dos objetos cuelgan de dos cuerdas unidas a dos ruedas capaces de girar respecto a un mismo eje (ruedas concéntricas). El momento de inercia de las dos ruedas es de $40\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$. Los radios son $R_1 = 1{,}2$ m y $R_2 = 0{,}4$ m.

- ***a*) Si $m_1 = 24$ kg, calcular el valor de m_2 para que sea nula la aceleración angular de las ruedas.**
- ***b*) Si se colocan con suavidad 12 kg sobre la parte superior de m_1, calcular la aceleración angular de las ruedas y**
- ***c*) la tensión en las cuerdas.**

SOLUCIÓN

Suponemos que la masa m_1 cuelga de la rueda de radio mayor R_1 mientras que m_2 de la de radio menor R_2.



Las fuerzas que actúan sobre las masas son sus pesos y las tensiones:

$$\sum F_i = ma,$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a, \qquad (8.1)$$

$$-m_2 g + T_2 = m_2 a. \qquad (8.2)$$

Nótese la elección de los signos acorde a la dirección del movimiento. Hemos elegido como positivo el sentido de las agujas del reloj, marcado por la flecha roja en la figura.

Mientras que el torque neto que actúa sobre el sistema formado por las dos ruedas es

$$\tau = \sum F_i R_i = I\alpha,$$

$$T_1R_1 - T_2R_2 = I\alpha. \tag{8.3}$$

Es de vital importancia la elección de los signos en esta última ecuación. Ésta se ha hecho teniendo en cuenta que el torque que ejerce la tensión de cada cuerda trata de hacer girar al sistema completo en sentidos opuestos.

Como el sistema está en equilibrio la aceleración es nula ($a = \alpha = 0$)

$$m_1g - T_1 = 0,$$

$$-m_2g + T_2 = 0,$$

$$m_1gR_1 - m_2gR_2 = 0,$$

de lo que se deduce que

$$m_2 = \frac{R_1}{R_2}m_1 = \frac{1{,}2m}{0{,}4m} \cdot 24 \text{ kg} = 72 \text{ kg}.$$

En el apartado **(b)** se nos pide la aceleración de la rueda y las tensiones de las cuerdas teniendo en cuenta que $m_1 = 24$ kg + 12 kg = 36 kg. Para ello primero aplicamos la 2ª Ley de Newton de cada una de las masas así como la de la rueda.

$$m_1a_1 = m_1g - T_1,$$

$$-m_2a_2 = m_2g - T_2,$$

$$T_1R_1 - T_2R_2 = I\alpha.$$

De las dos primeras ecuaciones pueden obtenerse las tensiones

$$T_1 = m_1(g - a_1),$$

$$T_2 = m_2(g + a_2),$$

que usamos en la tercera ecuación

$$m_1(g - a_1)R_1 - m_2(g + a_2)R_2 = I\alpha.$$

Vemos que aún tenemos dos aceleraciones a priori desconocidas (a_1 y a_2) sin embargo, como la cuerda no desliza por la rueda podemos aplicar la condición de rodadura, esto es $a_i = R_i\alpha$, con lo que sustituyendo en la ecuación anterior se llega a:

$$\alpha = \frac{g(m_1R_1 - m_2R_2)}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I} = 1,37 \text{ rad/s}^2.$$

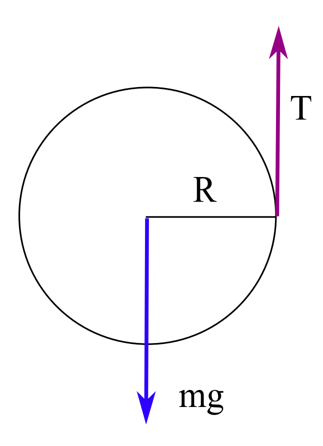
Para el apartado **(c)** tenemos en cuenta de nuevo la condición de rodadura con lo que las tensiones serán:

$$T_1 = m_1(g - R_1\alpha) = 293{,}8 \text{ N},$$

$$T_2 = m_2(g + R_2\alpha) = 754{,}1 \text{ N}.$$

9. Un cilindro uniforme de masa m y radio R se encuentra arrollado a una cuerda fuertemente sujeta al techo. El cilindro cae verticalmente desenrollándose. Demostrar que la aceleración del cilindro está dirigida hacia abajo y que su magnitud es $a = 2g/3$. Calcular la tensión de la cuerda.

SOLUCIÓN



Sobre el cilindro actúan dos fuerzas opuestas cuyo punto de aplicación es diferente. Por un lado, el peso del cilindro (mg) actúa sobre el centro de masas hacia abajo. Por otra parte, la tensión de la cuerda actúa sobre la superficie del cilindro hacia arriba. Esta última, al no estar aplicada sobre el centro de masas es la que ejercerá un momento que hará girar el cilindro. Planteamos la ecuaciones de Newton con las fuerzas y momentos presentes en el sistema:

$$mg - T = ma,$$

$$TR = I\alpha.$$

De la segunda ecuación podemos despejar la tensión y sustituirla en la primera

$$mg - \frac{I\alpha}{R} = ma.$$

Como la cuerda no desliza por la superficie del cilindro se cumple la condición de rodadura $\alpha = a/R$ y entonces la aceleración queda:

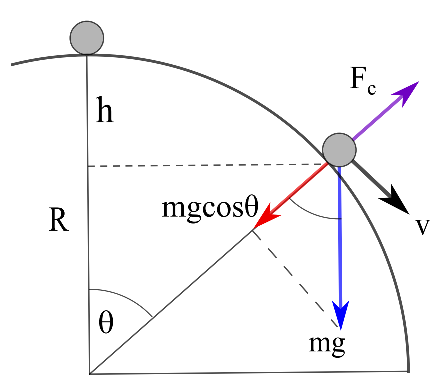
$$a = \frac{g}{1 + I/mR^2}.$$

Como el momento de inercia de un cilindro es $I = \frac{1}{2}mR^2$ entonces la aceleración y la tensión serán finalmente:

$$a = \frac{2g}{3}, \qquad T = m(g - a) = \frac{1}{3}mg.$$

10. Una bolita puntual de masa m desliza sin rodadura ni rozamiento sobre una cúpula esférica de radio R desde su punto más alto con velocidad inicial nula. Determinar el punto en el cual la bolita deja de estar en contacto con la superficie esférica. Realizar el mismo cálculo suponiendo que la bolita es una esfera sólida de radio r que rueda sobre la superficie. ¿En qué caso deja de estar en contacto antes? ¿Y si fuera un cilindro en lugar de una bolita?

SOLUCIÓN



Mientras la bolita se desliza en la superficie actúan sobre ella dos fuerzas perpendiculares a la superficie: la componente normal del peso y la fuerza centrífuga. El punto en el que deja de estar en contacto con la superficie será aquel en el que la fuerza centrífuga sea un poco mayor que la componente del peso.

Planteamos la ecuación de Newton con las fuerzas perpendiculares a la superficie:

$$mg\cos\theta - \frac{1}{R}mv^2 = ma_n.$$

En el momento en el que la bolita deja de estar en contacto con la superficie significará que las dos fuerzas presentes están equilibradas y por tanto, $a_n = 0$. Así

$$g\cos\theta = \frac{v^2}{R}. \tag{10.1}$$

Ahora, para obtener la velocidad de la partícula debemos hacer uso del teorema de la conservación de la energía. Toda la energía potencial de la bolita en el punto inicial, situado a una altura h respecto al punto en el que deja de estar en contacto, se transformará en energía cinética.

$$U_i = K_f,$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$

Teniendo en cuenta que $h = R(1 - \cos\theta)$ obtendremos

$$v^2 = 2gR(1 - \cos\theta),$$

que insertando en la ecuación (10.1) nos porporcionará

$$\cos\theta = \frac{2}{3},$$

que equivale a un ángulo aproximado de 48,2°.

En el segundo caso, considerando la bolita como una esfera (o cilindro) de radio r que rueda, debemos tener en cuenta simplemente que la energía cinética final será la suma de la energía cinética del centro de masas más la energía cinética rotacional, esto es

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Teniendo en cuenta la condición de rodadura de la bolita ($v = r\omega$) y realizando el mismo procedimiento que en el caso anterior se llega a

$$v^2 = \frac{2gR}{1 + \frac{I}{mr^2}}(1 - \cos\theta),$$

que introduciendo de nuevo en la ecuación (10.1) proporciona

$$\cos\theta = \frac{2}{\frac{I}{mr^2} + 3}.$$

Si ahora tenemos en cuenta que los momentos de inercia de la esfera y del cilindro son $I = \frac{2}{5}mR^2$ y $I = \frac{1}{2}mR^2$ respectivamente, obtendremos:

$$\cos\theta_{\text{esfera}} = \frac{10}{17}, \qquad \cos\theta_{\text{cilindro}} = \frac{4}{7}.$$

Se puede comprobar con facilidad que

$$\frac{2}{3} > \frac{10}{17} > \frac{4}{7},$$

con lo que concluimos que la mayor distancia la recorre el cilindro, seguido de la esfera y por último la masa puntual.

Es extraordinariamente llamativo que en todos los casos esta distancia no depende de la masa ni del radio de la bolita ni del radio de la superficie. ¿Por qué?

11. **Un ágil profesor de física se detiene en el centro de una mesa giratoria con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de $5\,kg$ en cada mano. Se le pone a girar sobre el eje vertical dando una vuelta cada 2 segundos. Calcular la nueva velocidad angular si el profesor pega las mancuernas a su abdomen. El momento de inercia del profesor sin mancuernas es de 3 kg · m^2 con los brazos extendidos y de $2{,}2$ kg · m^2 si pone las manos en el abdomen. Las mancuernas están a 1 m del eje al principio y a $0{,}2$ m al final. Tratarlas como partículas puntuales.**

SOLUCIÓN

El momento de inercia del sistema del profesor más las mancuernas en los instantes inicial y final es

$$I_i = I_{\text{prof},i} + 2mR_i^2,$$

$$I_f = I_{\text{prof},f} + 2mR_f^2,$$

donde $I_{\text{prof},i}$ y $I_{\text{prof},f}$ son los momentos de inercia del profesor inicial y final (con los brazos extendidos y recogidos, respectivamente), R_i y R_f son las distancias inicial y final de las mancuernas al eje y m es la masa de una mancuerna.

En el sistema no actúa ninguna fuerza ni torque por lo que se debe cumplir que el momento angular sea constante ya que $\tau = \frac{dL}{dt} = 0$ y por tanto $L = cte$. Así

$$L_i = L_f,$$

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f,$$

$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{I_{\text{prof},i} + 2mR_i^2}{I_{\text{prof},f} + 2mR_f^2}.$$

Según el enunciado, inicialmente gira dando una vuelta cada dos segundos, esto es, $\omega_i = 0{,}5$ rev/s. Introduciendo los datos númericos del problema llegamos a que la velocidad angular final es $\omega_f = 2{,}5$ rev/s. Observamos que la velocidad se incrementa notablemente, haciéndose cinco veces superior a la inicial.

12. Una hélice de turbina de motor a reacción de un avión tiene un momento de inercia de $2{,}5$ kg·m^2 alrededor de su eje de rotación. Al arrancar la turbina su velocidad angular en función del tiempo es $\omega = 40$ (rad/s^3)t^2.

- ***a*) Calcular el momento angular de la hélice en función del tiempo y en $t = 3$ s.**
- ***b*) Determinar el momento neto que actúa sobre la hélice en función del tiempo y en $t = 3$ s.**

SOLUCIÓN

De la definición del momento angular se puede deducir la expresión

$$L = I\omega, \tag{12.1}$$

por lo que el momento angular en función del tiempo para la turbina será:

$$L(t) = I\omega(t) = I40t^2.$$

El momento angular en el instante $t = 3s$ se obtiene sin más que introducir los datos del problema a esta expresión:

$$L(t = 3) = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad/s}.$$

Para obtener el momento de fuerzas neto, o torque, que se ejerce sobre la turbina aplicamos la segunda Ley de Newton de la dinámica de rotación en forma diferencial, esto es, el torque neto es la variación en el tiempo del momento angular:

$$\tau = \frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt},$$

ya que en este caso la I es constante. Derivando entonces se obtiene el torque en función del tiempo:

$$\tau(t) = I80t.$$

Y finalmente $\tau(t = 3) = 600\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot rad/s^2}$.

13. **Un cilindro uniforme de masa M y radio R gira sobre un eje sin rozamiento. Se enrolla una cuerda alrededor del mismo que se une a una masa m la cual está apoyada en un plano inclinado sin rozamiento de ángulo θ. El sistema se deja en libertad desde el reposo con la masa a una altura h sobre la base del plano inclinado.**

    a) **¿Cuál es la aceleración de la masa m?**

    b) **¿Cuál es la tensión de la cuerda?**

    c) **¿Cuál es la energía total del sistema cuando la masa está a la altura h?**

    d) **¿Cuál es la energía total cuando la masa está en la base del plano inclinado y posee una velocidad v?**

    e) **¿Cuál es el valor de esta velocidad?**

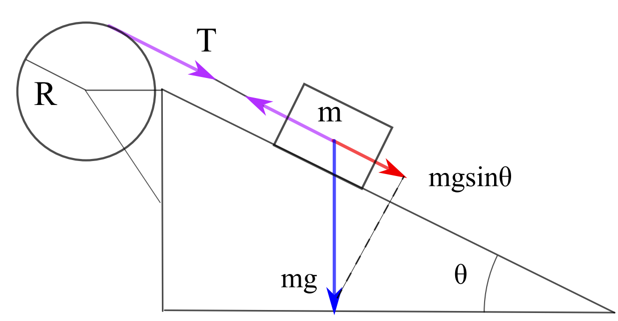
    f) **Analizar las respuestas para los casos extremos de $\theta = 0°$, $\theta = 90°$ y $M = 0$.**

SOLUCIÓN

a) Aplicando la segunda Ley de Newton sobre la masa m en dirección paralela al plano inclinado se tiene

$$ma = mg \sin\theta - T, \tag{13.1}$$

ya que las únicas fuerzas que actúan sobre este objeto son su peso y la tensión de la cuerda.



Por otro lado, la tensión de la cuerda ejerce un torque sobre el cilindro. Este torque es:

$$\tau = TR = I\alpha, \tag{13.2}$$

siendo $I = \frac{1}{2}MR^2$ el momento de inercia del cilindro respecto a un eje que pasa por su centro.

Dado que la cuerda rueda sin deslizar sobre el cilindro se cumple la condición de rodadura $a = \alpha R$ y así podemos poner la tensión como:

$$T = \frac{I\alpha}{R} = \frac{1}{2}Ma.$$

Introduciendo esta expresión para la tensión en (13.1) podemos obtener la aceleración de la masa m:

$$a = g\frac{\sin\theta}{1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}}.$$

b) Una vez obtenida esta aceleración es trivial obtener la tensión de la cuerda:

$$T = \frac{1}{2}Ma = \frac{1}{2}Mg\frac{\sin\theta}{1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}}.$$

c) En el instante inicial, el sistema está en reposo y por tanto la única energía será la energía potencial de la masa m por el hecho de estar a una altura h del suelo, esto es:

$$E_i = U_i = mgh.$$

d) En este problema no se nos indica la existencia de fuerzas disipativas ni no conservativas actuando sobre el sistema. Únicamente está actuando la gravedad, que es una fuerza conservativa. Por consiguiente, la energía mecánica se conserva en todo instante.

e) La conservación de la energía mecánica implica que en nuestro sistema, mientras que en el instante inicial toda la energía es potencial, en el instante final, cuando la masa m está en la base, toda la energía es cinética. Dado que la energía cinética final será la suma de la de la masa más la del cilindro, se tiene que

$$U_i + K_i = U_f + K_f,$$

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Aplicando la condición de rodadura $v = R\omega$ y teniendo en cuenta el valor del momento de inercia del cilindro $I = \frac{1}{2}MR^2$ tenemos

$$mgh = \frac{1}{4}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

de donde podemos despejar fácilmente

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}}}.$$

Es interesante observar que la velocidad final del objeto es independiente el ángulo del plano inclinado. ¿Por qué?

f) Analicemos ahora qué ocurre con los resultados en los casos específicos mencionados en el problema. En el caso de $\theta = 0°$ tendremos que $\sin\theta = 0$ y por tanto la componente del peso paralela al plano es nula, con lo que tanto la tensión como la aceleración del objeto será cero. El objeto no se mueve.
En el caso de $\theta = 90°$ se tiene $\sin\theta = 1$ con lo que

$$a = \frac{g}{1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}},$$

siendo esta aceleración la máxima posible en este problema.
En el caso de que la masa del disco sea $M = 0$ se tendrá

$$a = g\sin\theta,$$

y

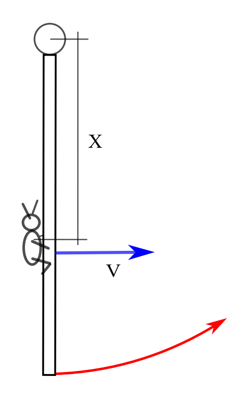
$$v = \sqrt{2gh},$$

que son los resultados que se obtendrían para el caso en el que el objeto se deslizase libremente por el plano inclinado, sin estar sujeto a ningún cilindro.

14. **Scott Lang es un joven ladrón que por casualidades de la vida se encontró un traje provisto de partículas Pym que le permitían reducir su tamaño convirtiéndose desde entonces en Ant-man. En el transcurso de una de sus épicas batallas, Scott, de masa m, es lanzado horizontalmente con velocidad constante v pero consigue aferrarse con firmeza a una barra**

delgada de masa M y longitud ℓ que cuelga de un pivote en su parte superior. Si el lugar donde se sostiene nuestro pequeño héroe está a una distancia x del pivote, determinar la relación que existe entre las energías inicial, cuando Ant-man está casi tocando la barra, y final, cuando Ant-man está aferrado a la barra.

SOLUCIÓN



En el sistema compuesto por Ant-man y la barra no hay ninguna fuerza que ejerza un torque, por lo tanto, el momento angular debe conservarse.

$$L_i = L_f.$$

En el instante en el que Ant-man toca la barra, su momento angular respecto al pivote es $L_i = mvx$.

Las energías inicial y final serán:

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{L_i^2}{2I_i}, \qquad E_f = \frac{1}{2}I_f\omega^2 = \frac{L_f^2}{2I_f}.$$

Los momentos de inercia inicial y final son:

$$I_i = mx^2,$$

$$I_f = I_{\text{barra}} + mx^2,$$

donde hemos tenido en cuenta el teorema de Steiner y $I_{\text{barra}} = \frac{1}{3}M\ell^2$. Así, la relación entre las energías final e inicial será:

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{I_i}{I_f}.$$

Sustituyendo las expresiones para los momentos de inercia y operando se tendrá finalmente:

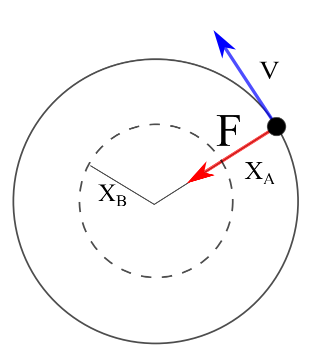
$$\frac{E_f}{E_i} = \left(1 + \frac{M}{3m}\frac{\ell^2}{x^2}\right)^{-1}.$$

Resulta instructivo pararse a analizar esta expresión. Lo primero que llama la atención es que parece que la energía no se conserva, ya que la relación entre la energía final e inicial en general no es 1, cosa que solo se produce cuando M o ℓ son cero. Sin embargo, en el caso en el que $x \to 0$ se tiene que $\frac{E_f}{E_i} \to 0$ lo que significa que se pierde toda la energía en el impacto. *¿Cómo puede ser posible esto? ¿No se supone que en ausencia de fuerzas no conservativas la energía se conserva? ¿Qué puede estar pasando?*[1]

15. **Una masa puntual se mueve en un plano horizontal. La masa está sujeta a una cinta elástica que se encuentra fija en el extremo opuesto. Esta cinta ejerce una fuerza $F = bx$ hacia el punto fijo de la cinta, siendo x la longitud de la cinta. Cuando la masa pasa por un punto situado a una distancia x_A del punto de giro, su velocidad es v_A. Calcular su velocidad cuando el objeto está a una distancia de x_B del punto de giro. Determinar asimismo el coeficiente b.**

SOLUCIÓN

a) Para obtener la velocidad de la masa girando sobre el círculo de radio x_B tenemos que fijarnos que la única fuerza presente en el sistema es la ejercida por la cinta elástica sobre la masa.



Esta fuerza tiene dirección radial por lo que no ejerce ningún momento al ser paralela al radio de giro.

$$\tau = \frac{dL}{dt} = 0.$$

Como consecuencia el momento angular se conserva.

$$L_A = L_B,$$

$$x_A m v_A = x_B m v_B,$$

[1]Pista: Notar que sólo hemos calculado la energía cinética. ¿Estamos seguros de que no existe ninguna otra fuerza no conservativa actuando sobre el sistema? Dejamos al lector meditar sobre ello.

de donde podemos despejar fácilmente la velocidad

$$v_B = \frac{x_A}{x_B} v_A.$$

b) Para obtener el parámetro de la fuerza b debemos tener en cuenta que no existen fuerzas disipativas en el sistema, ya que la única fuerza presente (elástica) es conservativa. Como consecuencia la energía se conserva.

$$E_A = E_B,$$
$$K_A + U_A = K_B + U_B.$$

La energía potencial puede obtenerse calculando el trabajo efectuado por la cinta elástica al desplazar la masa una distancia x.

$$U = W = \int F\, dx = \int bx\, dx = \frac{1}{2} bx^2.$$

La energía cinética de un objeto en rotación es:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Como en este caso $I = mx^2$ y $v = \omega x$, siendo x el radio de giro, tenemos que la energía cinética no es más que

$$K = \frac{1}{2} mv^2,$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2} mv_A^2 + \frac{1}{2} bx_A^2 = \frac{1}{2} mv_B^2 + \frac{1}{2} bx_B^2,$$

de donde podemos despejar fácilmente el parámetro b:

$$b = -m\, \frac{v_A^2 - v_B^2}{x_A^2 - x_B^2}.$$

16. En un decisivo partido de Quidditch entre las casas de Gryffindor y Slytherin estos últimos parten con ventaja al disponer de escobas de un modelo superior que les confieren mayor velocidad. Sin embargo, Harry Potter había asistido a clases de física esa semana y decide usar lo aprendido para aumentar su velocidad. Para ello agarra firmemente una cuerda que cuelga atada de lo alto de un gran poste vertical y comienza a volar girando alrededor del poste manteniendo bien tensa la cuerda enrollándola sobre el poste. Si la longitud inicial de la cuerda es r_i y su velocidad inicial v_i determinar:

a) la longitud que debería enrollar la cuerda para duplicar su velocidad inicial,

b) la tensión que soporta la cuerda en función de su longitud,

c) la diferencia de energía entre los instantes inicial y final de la maniobra.

Suponer que la masa de la cuerda es despreciable.

SOLUCIÓN

a) En este problema partimos de la premisa de que la escoba mágica de Harry no puede acelerar por sus propios medios mágicos y que por ello necesita de una ayuda de la Física. Con esta premisa nos damos cuenta de que en el sistema formado por Harry sujeto a la cuerda y girando alrededor del poste no existen fuerzas que ejerzan momento, ya que la única fuerza es la tensión de la cuerda que se ejerce en dirección radial al movimiento. Por tanto, el momento angular se conserva.

$$L_i = L_f,$$

$$mv_i r_i = mv_f r_f,$$

donde $v_{i,f}$ y $r_{i,f}$ es la velocidad y la distancia de Harry al poste en los instantes inicial y final y m su masa. Así, para que la velocidad final sea el doble que la inicial ($v_f = 2v_i$) la distancia final debe ser:

$$r_f = \frac{v_i}{v_f} r_i = \frac{1}{2} r_i.$$

b) La tensión de la cuerda es la fuerza centrípeta necesaria para que Harry se mantenga en movimiento rotatorio en torno al poste. Esta fuerza centrípeta es

$$T = F = \frac{mv^2}{r}.$$

Así inicialmente la tensión será

$$T_i = \frac{mv_i^2}{r_i},$$

mientras que al final será

$$T_f = \frac{mv_f^2}{r_f} = \frac{m(2v_i)^2}{r_i/2} = 8T_i.$$

c) En el sistema no existen fuerzas conservativas, ya que la cuerda no es elástica, por tanto la diferencia de energía entre los instantes inicial y final será la diferencia de energía cinética:

$$\Delta E = K_f - K_i,$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m(4v_i^2 - v_i^2) = 3K_i.$$

Puede verse que hay por tanto un aumento de la energía mecánica en el sistema. *¿De dónde viene ese exceso de energía?*[2]

---

[2]Pista: ¿hay alguna fuerza en el sistema que esté efectuando un trabajo $W = F \cdot \Delta r$?

CAPÍTULO 2

OSCILACIONES

En este capítulo se presentan problemas relativos al movimiento oscilatorio que se produce cuando se perturba un sistema que inicialmente se encuentra en equilibrio (estable). Se analizan situaciones de este movimiento tanto en su forma más básica, movimiento armónico simple (MAS), como otras más complejas que cubren situaciones más reales donde aparecen fuerzas disipativas que amortiguan el movimiento, dando lugar al movimiento oscilatorio amortiguado. Para compensar esta disipación energética, se introducen fuerzas impulsoras con frecuencias próximas a la de oscilación sin amortiguamiento (frecuencia natural), dando lugar a un fenómeno de resonancia.

Movimiento armónico simple

Ecuación del movimiento	$\ddot{x} = -\omega^2 x$
Desplazamiento	$x = A\sin(\omega t + \phi)$
Velocidad	$v = \dot{x} = \omega A\cos(\omega t + \phi)$
Aceleración	$a = \ddot{x} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)$
Energía total	$E_T = K + U = \dfrac{1}{2}kA^2$
	$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ (definición)
Frecuencia angular	$\omega = \sqrt{k/m}$ (masa ligada a un muelle)
	$\omega = \sqrt{g/L}$ (péndulo simple)

Oscilaciones amortiguadas

Ecuación del movimiento	$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\beta\dot{x}$
Frecuencia	$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$
Amplitud	$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$
Energía	$E(t) = E_0 e^{-2\beta t}$
Tiempo de relajamiento	$\tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{m}{b}$
Factor de calidad Q	$Q = \omega_0 \tau$

Problemas

1. **Sea un objeto de masa m conectado a un muelle que oscila con una amplitud A y un periodo T:**

   a) **Determinar su energía total.**

   b) **Calcular su velocidad máxima.**

   c) **¿En qué posición x_1 la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?**

   SOLUCIÓN

   Si las oscilaciones no son grandes, la fuerza que ejerce el muelle sobre la masa m es proporcional a su elongación (Ley de Hooke), esto es, $F = -kx$, donde k es la constante del muelle, por lo que la ecuación del movimiento de un oscilador de este tipo es

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x.$$

   Esta ecuación tiene por solución general la función

$$x(t) = A\sin(\omega t).$$

   Por otra parte, la energía total será la suma de la cinética más la potencial,

$$E_m = E_p + E_c.$$

   La energía potencial acumulada en el muelle en función de su elongación es

$$E_p = -\int_0^x F dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

   mientras que la energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2),$$

   donde hemos tenido en cuenta que

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 = \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) \\ &= \omega^2 A^2[1 - \sin^2(\omega t)] \\ &= \omega^2(A^2 - x^2). \end{aligned}$$

Así,

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2.$$

Como $\omega = \frac{2\pi}{T}$ entonces

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi A}{T}\right)^2.$$

La velocidad máxima se dará cuando toda la energía del oscilador sea cinética, esto es, cuando pase por su punto de equilibrio $x = 0$.

$$E_c = E_m,$$

$$\frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi A}{T}\right)^2,$$

de donde se obtiene

$$v_{\text{max}} = \frac{2\pi A}{T} = \omega A.$$

La posición x_1 para la cual obtenemos una velocidad $v_1 = \frac{1}{2}v_{\text{max}}$ se puede calcular fácilmente de la expresión de la energía mecánica total, ya que en todo punto del recorrido esta energía se conserva.

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2,$$

de donde podemos despejar

$$x_1^2 = A^2 - \frac{v_1^2}{\omega^2}.$$

Sustituyendo $v_1 = \frac{1}{2}v_{\text{max}}$ en esta ecuación y teniendo en cuenta que $v_{\text{max}} = \omega A$ llegamos finalmente a

$$x_1 = \frac{A}{4}.$$

2. **Una partícula que vibra a lo largo de un segmento de 10 cm de longitud posée en el instante inicial su máxima velocidad que es de 20 cm/s.**

   a) **Determinar las constantes del movimiento (amplitud, fase inicial, pulsación, frecuencia y periodo).**

b) Escribe las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración en función del tiempo.

c) Calcula la elongación, velocidad y aceleración en el instante $t = 1,75\pi$ s.

d) ¿Cuál es la diferencia de fase entre este instante y el instante inicial?

SOLUCIÓN

a) Las constantes del movimiento son:

Amplitud: $A = 5$cm ya que oscila en un segmento de 10cm.

Fase inicial: $\varphi_0 = 0$, pues se nos dice que comienza el movimiento en su punto de máxima velocidad, que coincide con el punto de equilibrio $x = 0$.

Pulsación: $\omega = v_{\max}/A = 4$ rad/s.

Periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$ s.

Frecuencia: $f = T^{-1} = \frac{2}{\pi}\text{s}^{-1}$.

b) Las expresiones que determinan la evolución del oscilador son

$$x(t) = A\sin(\omega t) = 5\sin(4t),$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega A\cos(\omega t) = 20\cos(4t),$$
$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t) = -80\sin(4t).$$

c) Los valores de los parámetros en $t = 1{,}75\pi$ s $= \frac{7}{4}\pi$ s serán

$$x(t = \frac{7}{4}\pi) = 5\sin(7\pi) = 0 \text{ cm},$$

$$v(t = \frac{7}{4}\pi) = 20\cos(7\pi) = -20 \text{ cm/s},$$
$$a(t = \frac{7}{4}\pi) = -80\sin(7\pi) = 0 \text{ cm}/s^2.$$

d) La diferencia de fases entre los instantes $t_f = \frac{7}{4}\pi$ s y $t_i = 0$ s será

$$\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i,$$

donde $\varphi_i = \omega t_i + \varphi_0$ y $\varphi_f = \omega t_f + \varphi_0$ con lo que

$$\Delta\varphi = \omega(t_f - t_i) = 7\pi \text{ rad}.$$

3. **El movimiento que experimenta cierta partícula está descrita por la función**

$$x(t) = 7\sin(2t + \frac{\pi}{6}),$$

donde x se mide en centímetros y t en segundos. Determinar

a) **la posición de la partícula cuando $t = 0$ s,**

b) **la velocidad de la partícula cuando $t = 0$ s y $t = 5$ s,**

c) **la aceleración en los mismos instantes.**

SOLUCIÓN

a) La posición de la partícula en el instante inicial es $x(0) = 7\sin(\frac{\pi}{6}) = 3{,}5$ cm.

b) La expresión de la velocidad es $\dot{x}(t) = 14\cos(2t + \frac{\pi}{6})$ con lo que en los instantes pedidos la velocidad será $\dot{x}(0) = 12{,}12$ cm/s y $\dot{x}(5) = -6{,}36$ cm/s.

c) De igual manera, la expresión de la aceleración es $\ddot{x} = -28\sin(2t + \frac{\pi}{6})$ con lo que $\ddot{x}(0) = -14$ cm/s^2 y $\ddot{x}(5) = 24{,}94$ cm/s^2.

4. **Un objeto de 3 kg estira una longitud de $x_0 = 16$ cm a un muelle cuando cuelga de éste verticalmente en el equilibrio. El muelle se estira entonces desde su posición de equilibrio y el objeto se deja en libertad.**

a) **Determinar el coeficiente de restitución del muelle.**

b) **Determinar la frecuencia del movimiento.**

c) **¿Cambiaría la frecuencia si se duplica la masa del objeto colgante? Razonar la respuesta.**

SOLUCIÓN

a) En el estado de equilibrio, el peso del objeto está compensado con la fuerza elástica del muelle.

$$mg - kx_0 = 0,$$

por lo que se puede calcular fácilmente el coeficiente de restitución del muelle

$$k = \frac{mg}{x_0} = 184 \text{ N/m}.$$

b) Una vez puesto en marcha el oscilador, la ecuación que gobierna el movimiento es

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x,$$

cuya solución general es $x(t) = A\sin(\omega t)$. Dado que $\omega = 2\pi f$ entonces

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1{,}25 \text{ s}^{-1}.$$

c) Como puede verse en el resultado anterior, la frecuencia depende de la relación entre el coeficiente de restitución y la masa que cuelga del muelle, así que si esta se duplica, la frecuencia se verá reducida un factor $\sqrt{2}$.

$$f' = f/\sqrt{2}.$$

5. **Un péndulo simple formado por una masa m que cuelga de un fino hilo inextensible de longitud L se libera del reposo desde un ángulo ϕ_0:**

   ***a*) Suponiendo que el péndulo realiza un movimiento armónico simple, determinar su velocidad cuando atraviesa la posición $\phi = 0$.**

   ***b*) Considerando la conservación de la energía, determinar exactamente esta velocidad.**

   ***c*) Demostrar que los resultados de (a) y (b) coinciden cuando ϕ_0 es pequeño.**

   ***d*) Determinar la diferencia de los resultados para $\phi_0 = 0{,}20$ rad y $L = 1$ m.**

Nota: Si ϕ_0 es muy pequeño, $\cos\phi_0 \approx 1 - \frac{\phi_0^2}{2}$.

SOLUCIÓN

Sobre la masa colgada actúan dos fuerzas, su peso y la tensión de la cuerda. Al dejarla libre oscilará bajo el efecto de la componente tangencial del peso.

a) Aplicando la segunda Ley de Newton, la ecuación que gobierna el movimiento es

$$m\ddot{x} = -mg\sin\phi.$$

Como $x = L\phi$ la anterior ecuación se transforma en

$$L\ddot{\phi} = -g\sin\phi.$$

Si los desplazamientos son pequeños se puede aproximar $\sin\phi \approx \phi$ y así

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\phi = -\omega^2\phi,$$

que como ya sabemos es la ecuación de un movimiento armónico simple cuya solución es de la forma

$$\phi(t) = \phi_0\cos(\omega t),$$

que determina la posición angular en función del tiempo. Si lo que queremos son los desplazamientos lineales no hay más que multiplicar ambos lados de la igualdad por la longitud de la cuerda ($\ell = L\phi$) con lo que se transforma en

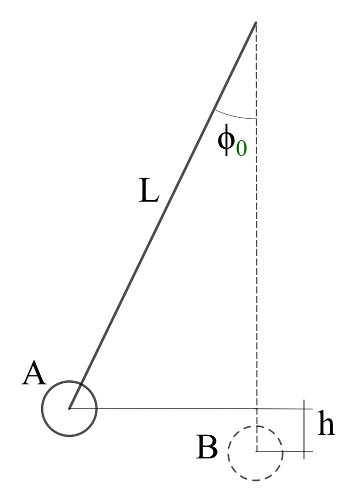
$$\ell(t) = \ell_0\cos(\omega t).$$

La velocidad será

$$v(t) = \dot{\ell}(t) = -\omega\ell_0\sin(\omega t).$$

Cuando el péndulo pasa por $\phi(t) = 0$ rad implica que $\cos(\omega t) = 0$. Esto solo se cumple para los instantes de tiempo que verifican $t = \frac{n\pi}{2\omega}$ s con $n = 1, 3, 5...$ Introduciendo este tiempo en la función de la velocidad se puede comprobar que $\sin(t) = 1$ para todo $n = 1, 3, 5...$, por tanto, la velocidad en ese punto será

$$v = \omega\ell_0 = \phi_0\sqrt{gL}.$$



b) El teorema de la conservación de la energía establece que la energía mecánica en los puntos A (punto más alto de la oscilación) y B (punto de equilibrio) debe ser la misma

$$K_A + U_A = K_B + U_B,$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B.$$

Teniendo en cuenta que $v_A = 0$, $v_B = v$, $h_A = h$ y $h_B = 0$ nos queda

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

de donde podemos despejar fácilmente

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Por geometría podemos obtener el valor de la altura

$$h = L(1 - \cos\phi_0).$$

Con lo que la velocidad es

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos\phi_0)}.$$

c) Cuando ϕ_0 es pequeño podemos aproximar $\cos\phi_0 \approx 1 - \frac{\phi_0^2}{2}$ con lo que la velocidad nos queda finalmente

$$v = \phi_0\sqrt{gL},$$

que coincide con la obtenida con el método anterior.

d) Cuando ϕ_0 no sea suficientemente pequeño, no podrá usarse la aproximación del $\cos\phi_0$ en el segundo método[1] y existirán diferencias entre la estimación de la velocidad por los dos métodos. En el caso particular

[1]En rigor, tampoco podría usarse la aproximación del $\sin\phi$ en el primer método para obtener la ecuación del movimiento armónico. Sin embargo la ecuación diferencial que obtendríamos sería mucho más difícil de resolver y queda fuera de los objetivos de este curso, por lo que mantendremos esa estimación.

del problema ($\phi_0 = 0{,}20$) la velocidades obtenidas en cada uno de los métodos serán $v_I = 0{,}626418$ m/s y $v_{II} = 0{,}625375$ m/s con lo que la diferencia relativa entre ambos es menor al 0,17 %.

6. **En la búsqueda de nuevos planetas, la tripulación de la Enterprise explora el interior de una alta torre en las ruinas de una antigua civilización alienígena de la que cuelga una bola de plomo a una altura de 14.2 cm sobre el suelo mediante un fino y largo cordel. En ese momento, el ingeniero jefe Scott comunica que necesita saber con exactitud la gravedad del planeta para poder despegar de nuevo pero un fallo en los sensores no le permite obtenerla. Al señor Spock se le ocurre una forma de calcularlo: Hace oscilar *ligeramente* el péndulo midiendo 50 oscilaciones completas en 5 minutos y 45.4 segundos. Acto seguido, acorta el cordel elevando la bola a 2.2 m sobre el suelo y vuelve a hacerla oscilar, midiendo esta vez 50 oscilaciones en 5 minutos y 14 segundos. De esa manera consigue obtener la gravedad del planeta además de la altura de la torre. ¿Cómo lo ha hecho? ¿Cuáles son esos valores? ¿Cómo cambiaría el resultado si hubiera usado una bola con el doble de masa?**

SOLUCIÓN

El Señor Spock tiene una sólida formación en Física Básica y sabe que la ecuación del movimiento armónico simple de un péndulo es

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\phi = -\omega^2\phi.$$

Como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, se puede establecer una relación entre la gravedad del planeta, la longitud del hilo y el periodo de oscilación.

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L}.$$

La longitud del hilo (L) es desconocida pero el Señor Spock actúa de forma muy inteligente para solventar ese problema: realiza dos medidas del periodo con longitudes diferentes en cada caso, siendo estas

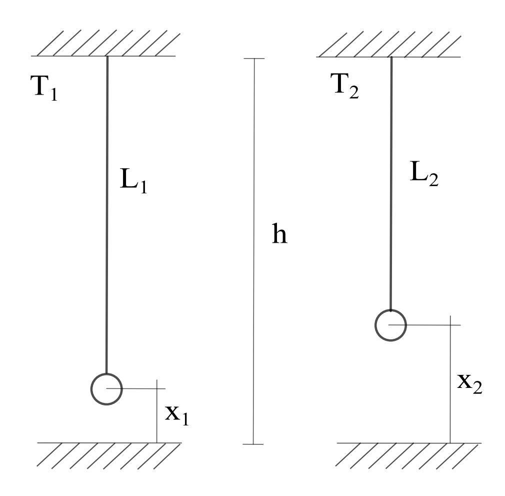
$$T_1 = \frac{354{,}5}{50} = 6{,}908 \text{ s}, \qquad T_2 = \frac{314}{50} = 6{,}28 \text{ s}.$$

Las longitudes del hilo en cada medida son $L_1 = h - x_1$ y $L_2 = h - x_2$ donde h es la altura de la torre, también desconocida de momento, y

x_1 y x_2 son las alturas de la bola respecto al suelo, datos conocidos. Se verifica entonces que

$$h = L_1 + x_1 = L_2 + x_2,$$

con lo que $L_2 = L_1 - \Delta x$ siendo $\Delta x = x_2 - x_1$.



De esa manera se verifican en cada experiencia las ecuaciones

$$g\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 = L_1,$$

$$g\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 = L_2.$$

Como $L_2 = L_1 - \Delta x$ es fácil comprobar que

$$g\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 = g\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 - \Delta x,$$

de donde se puede obtener finalmente

$$g = (2\pi)^2 \frac{\Delta x}{T_1^2 - T_2^2}.$$

Introduciendo los datos numéricos nos da un resultado de

$$g = 9{,}809 \text{ m/s}^2.$$

Para hallar la altura de la torre simplemente debemos tener en cuenta que $h = L_1 + x_1$, siendo

$$L_1 = g\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 = \frac{T_1^2}{T_1^2 - T_2^2}\Delta x = \frac{\Delta x}{1 - T_2^2/T_1^2}.$$

Introduciendo datos númericos nos queda finalmente

$$h = 12 \text{ m}.$$

Como puede observarse, en ningún momento se ha hecho uso de la masa de la bola. *El periodo de un péndulo no depende de su masa* y por tanto el resultado no cambia en absoluto si se usa una masa diferente.

7. **Una bolita pequeña de masa m se desliza sin rozamiento en un cuenco esférico de radio R:**

   ***a*) Demostrar que la ecuación de movimiento de la partícula es aproximadamente la del Movimiento Armónico Simple.**

   ***b*) Supongamos que desplazamos la partícula una pequeña distancia s_1 ($s_1 \ll R$) de la parte inferior del cuenco. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a la parte inferior de nuevo? ¿Y si la desplazamos una distancia $s_2 = 3s_1$?**

Nota: Si ϕ_0 es muy pequeño, $\cos\phi_0 \approx 1 - \frac{\phi_0^2}{2}$

SOLUCIÓN

a) Esta demostración es idéntica a la del problema 5 sin más que cambiar la longitud de la cuerda por el radio del cuenco esférico. El periodo de este movimiento será por tanto

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

b) La función que describe el movimiento de este *péndulo* es

$$s(t) = A\sin(\omega t + \phi),$$

donde A la amplitud y ϕ la fase inicial. Esta fase se determina con la condición inicial del movimiento. En nuestro caso, la bolita se

suelta inicialmente a una distancia $s(0) = s_1$ del fondo del cuenco. Como la bolita se deja caer desde el reposo (sin velocidad inicial), por conservación de la energía, esta distancia será precisamente la amplitud máxima del movimiento $A = s_1$. Así

$$s(0) = s_1 = s_1 \sin(0 + \phi),$$

que solo se verifica si $\phi = \frac{\pi}{2}$. Por tanto la función del movimiento es

$$s(t) = s_1 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Una vez en movimiento, el tiempo que tarda en llegar la bolita desde la posición s_1 hasta el fondo, en el que situamos el origen de coordenadas $s = 0$, se puede obtener resolviendo la ecuación

$$s(t) = 0 = s_1 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

que solo se verifica cuando el argumento del seno es

$$\omega t + \frac{\pi}{2} = n\pi,$$

con $n = 1, 2, 3....$ De aquí se obtiene fácilmente

$$t = \frac{\pi}{\omega}(n - \frac{1}{2}) = (2n - 1)\frac{T}{4}.$$

Es decir, cuando el tiempo es un número impar de veces el periodo partido por cuatro. Como estamos interesados en el tiempo más corto, entonces $n = 1$ y la solución es

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Como puede verse, en la solución no interviene la distancia inicial desde la que se suelta la bolita. Esto es porque *el periodo de un movimiento armónico simple no depende de la amplitud del mismo.* Por lo tanto, si la bolita se suelta desde otra distancia $s_2 = 3s_1$, siempre que se cumpla la condición $s_2 \ll R$, el tiempo que tardará en llegar al fondo será siempre el mismo.

8. **Demostrar que la función $x(t) = A_0 e^{-t/2\tau}\cos(\omega t + \phi)$ es solución de la ecuación del oscilador amortiguado**

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x},$$

con frecuencia $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2}$, frecuencia natural (sin amortiguamiento) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y tiempo de relajación $\tau = \frac{m}{b}$.

SOLUCIÓN

Para esta demostración solo debemos ir calculando las derivadas primera y segunda de la función $x(t)$ y sustituirlas en la ecuación del oscilador amortiguado dada en el enunciado. Teniendo en cuenta la regla de la cadena para derivar el producto de funciones y agrupando términos convenientemente tenemos

$$\dot{x}(t) = -A_0 e^{-t/2\tau}\left[\frac{b}{2m}\cos(\omega t + \phi) + \omega\sin(\omega t + \phi)\right],$$

$$\ddot{x}(t) = A_0 e^{-t/2\tau}\left[\left(\frac{b^2}{4m^2} - \omega^2\right)\cos(\omega t + \phi) + \frac{b}{m}\omega\sin(\omega t + \phi)\right].$$

Según el enunciado $k = m\omega_0^2$ y $b = \frac{m}{\tau}$, así, cada uno de los términos de la ecuación del movimiento quedan

$$-kx = -A_0 e^{-t/2\tau} k\cos(\omega t + \phi),$$

$$-b\dot{x} = A_0 e^{-t/2\tau}\left[\frac{b^2}{2m}\cos(\omega t + \phi) + b\omega\sin(\omega t + \phi)\right],$$

$$m\ddot{x} = A_0 e^{-t/2\tau}\left[\left(\frac{b^2}{4m} - m\omega^2\right)\cos(\omega t + \phi) + b\omega\sin(\omega t + \phi)\right].$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación del oscilador nos damos cuenta en primer lugar que el factor $A_0 e^{-t/2\tau}$ se va a cancelar, dejando entonces

$$\left(\frac{b^2}{4m} - m\omega^2\right)\cos(\omega t + \phi) + b\omega\sin(\omega t + \phi) =$$
$$= \left(\frac{b^2}{2m} - k\right)\cos(\omega t + \phi) + b\omega\sin(\omega t + \phi).$$

Los senos a ambos lados de la igualdad se cancelan dejando todo como suma de factores del coseno.

$$\left(\frac{b^2}{4m} - k + m\omega^2\right)\cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Esta igualdad debe cumplirse para todo instante t, por lo que la única forma es que el paréntesis se anule

$$\frac{b^2}{4m} - k + m\omega^2 = 0,$$

lo que nos permite despejar el valor de ω teniendo en cuenta que $k = m\omega_0^2$,

$$\omega^2 = \omega_0^2\left[1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2\right],$$

que es precisamente el valor indicado en el enunciado con lo que queda demostrado.

9. **Un oscilador armónico amortiguado con frecuencia natural ω_0 y parámetro de amortiguamiento $\beta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2\tau}$, se encuentra inicialmente en la posición de equilibrio. En un instante $t = 0$ recibe un impulso que lo pone en movimiento con una velocidad inicial v_0. Para este sistema se pide:**

   ***a*) Escribir la función que describe el movimiento del oscilador.**

   ***b*) Obtener la máxima elongación que alcanza una vez puesto en movimiento.**

   ***c*) Calcular el tiempo que deberá transcurrir para que la amplitud de las oscilaciones amortiguadas se reduzca hasta un $0{,}1\,\%$ de la máxima elongación anteriormente calculada.**

SOLUCIÓN

a) La ecuación del movimiento para este oscilador amortiguado es

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x},$$

que puede expresarse como

$$-\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x} = \ddot{x},$$

donde hemos tenido en cuenta $\beta = \frac{b}{2m}$ y $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Una posible solución de esta ecuación es

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi).$$

Como en el instante inicial el oscilador se encuentra en su punto de equilibrio podemos calcular la fase inicial, ya que

$$x(t=0) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi) = 0 \quad \rightarrow \sin\phi = 0 \quad \rightarrow \phi = 0,$$

y la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Queda por determinar la amplitud A_0, lo cual es posible imponiendo de la condición inicial $\dot{x}(t=0) = v_0$. Así

$$\dot{x}(t) = A_0 e^{-\beta t} \left(-\beta \sin\omega t + \omega \cos\omega t\right),$$

$$\dot{x}(0) = A_0\omega \quad \rightarrow \quad A_0 = \frac{v_0}{\omega}.$$

La función que describe el movimiento de este oscilador queda finalmente

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\beta t} \sin\omega t.$$

b) El máximo desplazamiento conlleva que la velocidad en ese punto sea nula ($\dot{x} = 0$). El instante $t_{\max}$ en el que se produce el máximo desplazamiento puede determinarse a través de la ecuación

$$\dot{x}(t_{\max}) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\beta t_{\max}} \left(-\beta \sin\omega t_{\max} + \omega \cos\omega t_{\max}\right) = 0,$$

que sólo se verifica si el paréntesis se anula, esto es, si

$$\omega \cos\omega t_{\max} = \beta \sin\omega t_{\max}.$$

Operando,

$$\frac{\omega}{\beta} = \tan\omega t_{\max},$$

de donde podemos despejar

$$t_{\max} = \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{\omega}{\beta}\right).$$

Introduciendo este valor en la función del movimiento obtenemos la máxima elongación $x_{\max} = x(t_{\max})$

$$x_{\max} = \frac{v_0}{\omega} e^{-\beta t_{\max}} \sin \omega t_{\max}.$$

c) La amplitud en función del tiempo es $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$. El tiempo que debe transcurrir para que $A(t) = 0{,}1\,\% x_{\max}$ será

$$0{,}001 x_{\max} = A_0 e^{-\beta t}.$$

Operando se llega a

$$t = -\frac{1}{\beta} \ln\left(0{,}001 \frac{x_{\max}}{A_0}\right).$$

10. **Se mide la velocidad terminal de una esfera de 3 kg dejándola caer en el aire obteniendo un valor $v_t = 25$ m/s. (Suponer que la fuerza de rozamiento es $F_r = -b\ v$). Seguidamente se une esta esfera a un muelle de constante de fuerza $k = 400$ N/m y se la hace oscilar con una amplitud inicial de 20 cm. Calcular:**

   ***a*) El tiempo de relajación τ.**

   ***b*) La frecuencia de oscilación.**

   ***c*) El factor de calidad Q.**

   ***d*) El tiempo que habrá transcurrido cuando la amplitud se reduzca a la mitad.**

   ***e*) La energía que se habrá perdido hasta ese instante.**

SOLUCIÓN

a) Un objeto colgado de un resorte oscilando en el seno de un fluido bajo la acción de una fuerza de rozamiento dependiente de la velocidad como la dada en el enunciado obedece la ecuación.

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} \dot{x},$$

cuya solución ya sabemos que es

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin(\omega t + \phi),$$

siendo $\tau = \frac{m}{b}$ el tiempo de relajación. Para poder obtener este parámetro debemos primero analizar el movimiento del objeto en caída libre moviéndose en el seno de un fluido. Éste se mueve bajo al acción de la gravedad y de una fuerza de rozamiento dependiente de la velocidad.

$$m\ddot{x} = mg - b\dot{x}.$$

Cuando el objeto llega a la velocidad terminal ($\dot{x} = v_{\text{ter}}$), se moverá con velocidad constante ($\ddot{x} = 0$), es decir, que la fuerza de rozamiento con el aire estará compensando el peso del objeto.

$$mg = bv_{\text{ter}},$$

de lo que se deduce que

$$b = \frac{mg}{v_{\text{ter}}}.$$

De esa manera concluimos que el tiempo de relajación es

$$\tau = \frac{v_{\text{ter}}}{g} \approx 2{,}6 \text{ s}.$$

b) Sabemos que la frecuencia de oscilación de un oscilador amortiguado es:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2,$$

siendo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ su frecuencia natural, con lo que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{g}{2v_{\text{ter}}}\right)^2} = 11{,}5 \text{ rad/s}.$$

c) El factor de calidad se define como el producto de la frecuencia natural del oscilador por el tiempo de relajación:

$$Q = \omega_0 \tau = 29{,}4.$$

d) En un movimiento oscilatorio amortiguado la amplitud depende del tiempo como

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}},$$

por tanto, el tiempo que debe transcurrir para que la amplitud sea la mitad de la inicial será:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}},$$

$$t = -2\tau \ln \frac{1}{2} = \frac{2v_{\text{ter}}}{g} \ln 2 = 3{,}54 \text{ s}.$$

e) La energía del oscilador armónico depende de su amplitud como

$$E = \frac{1}{2} k A^2.$$

La energía inicial, con $A_0 = 20$ cm, será por tanto $E_0 = 8$ J. Cuando la amplitud sea la mitad que la inicial $A_t = A_0/2$ se cumplirá

$$\frac{E_t}{E_0} = \frac{A_t^2}{A_0^2} = \frac{1}{4},$$

de lo que se deduce que la energía final será $E_t = \frac{E_0}{4}$. Así, la energía que se habrá perdido será:

$$\Delta E = E_0 - E_t = E_0 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} E_0 = 6 \text{ J}.$$

11. **Un cuerpo de masa $m = 2$ kg descansa sobre un tablero horizontal y oscila unido al extremo libre de un muelle de constante elástica $k = 200$ N/m. En un instante dado, las oscilaciones presentan una amplitud $A_0 = 30$ cm pero debido al rozamiento $F_r = -bv$, dicha amplitud se reduce a la mitad cuando han transcurrido $t_1 = 25$ s. Con estos datos determinar:**

    ***a*) El valor del coeficiente de amortiguamiento b, tiempo de relajación τ y parámetro de calidad Q.**

    ***b*) La frecuencia de oscilación.**

    ***c*) El tiempo que debe transcurrir para que se disipe la mitad de la energía del oscilador. ¿Cuál será su amplitud en ese momento?**

SOLUCIÓN

a) El objeto se mueve bajo la acción de dos fuerzas, la elástica del muelle ($F_e = -kx$) y la de rozamiento con la mesa ($F_r = -b\dot{x}$). Aplicando la segunda Ley de Newton la ecuación que gobierna el movimiento será:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x},$$

cuya solución es la función

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{bt}{2m}} \sin(\omega t + \phi),$$

con $\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ la frecuencia natural y $\tau = \frac{m}{b}$ el tiempo de relajación.

La amplitud disminuye en el tiempo como $A(t) = A_0 e^{-\frac{bt}{2m}}$ con lo que podemos obtener el parámetro b sabiendo que la amplitud en el instante dado ($t' = 25$ s) es la mitad que la inicial, esto es, $A(t') = \frac{A_0}{2}$.

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\frac{bt'}{2m}}.$$

Operando obtenemos

$$b = 2\ln 2 \frac{m}{t'} = 0{,}11 \text{ kg/s},$$

y el tiempo de relajación

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{t'}{2\ln 2} = 18 \text{ s}.$$

b) El factor de calidad será

$$Q = \omega_0 \tau = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{t'}{2\ln 2} = 180{,}3.$$

c) La frecuencia de oscilación será

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\ln 2}{t'}\right)^2} = 9{,}9996 \text{ rad/s}.$$

d) La energía de un movimiento armónico amortiguado es función de su amplitud, que como ya sabemos va disminuyendo con el tiempo.

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-\frac{bt}{m}} = E_0 e^{-\frac{bt}{m}}.$$

Así, el tiempo que debe transcurrir para que $E(t_{1/2}) = \frac{E_0}{2}$ será

$$t_{1/2} = \frac{m}{b}\ln 2 = \frac{t'}{2} = 12{,}5 \text{ s.}$$

12. **Una barra delgada de masa M y longitud L está suspendida desde uno de sus extremos (punto fijo O) y se encuentra realizando pequeñas oscilaciones. La barra tiene una densidad lineal de masa definida por la función**

$$\lambda(r) = \lambda_0\left[1 + (r/L)^2\right],$$

siendo r la distancia medida desde el extremo fijo y $\lambda_0 = 2M/3L$ su densidad de masa lineal. Determinar:

***a*) El momento de inercia I_0 de la barra respecto al extremo fijo O.**

***b*) Si el extremo opuesto de la barra oscila con una amplitud $A = L/100$, calcula la velocidad máxima de este punto.**

SOLUCIÓN

a) El momento de inercia respecto a un eje que pasa por el extremo de la barra puede obtenerse mediante su definición

$$I = \int r^2 dm,$$

con $dm = \lambda dr$ donde dr es un elemento diferencial de longitud. Así

$$I = \int_0^L r^2\lambda_0\left(1 + (r/L)^2\right) dr,$$

$$I = \frac{16}{45}ML^2.$$

b) La barra se encuentra realizando pequeñas oscilaciones alrededor de su punto fijo. La única fuerza presente que realiza el torque necesario para ello es la componente transversal de su peso $-mg\sin\theta$ que está aplicada a su centro de masas por lo que

$$\tau = I\ddot{\theta},$$

$$-mg\sin\theta\ell = I\ddot{\theta},$$

donde ℓ es la distancia del centro de masas al punto fijo. Necesitamos por tanto conocer en primer lugar donde se encuentra el centro de masas, ya que la densidad de la barra no es homogénea. La posición del centro de masas se define como

$$\begin{aligned} r_{cm} &= \frac{1}{M}\int_0^L r dm \\ &= \frac{1}{M}\int_0^L r\lambda_0\left(1+(r/L)^2\right) dr \\ &= \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto $\ell = L/2$ y

$$-mg\sin\theta\frac{L}{2} = I\ddot{\theta}.$$

Como las oscilaciones son pequeñas se puede admitir que $\sin\theta \approx \theta$ y por tanto la anterior ecuación queda:

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgL}{2I}\theta,$$

que es la ecuación de un movimiento armónico simple de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{2I}}.$$

Una solución de esta ecuación es la función

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t),$$

Si multiplicamos ambos lados por L tendremos

$$x(t) = A\sin(\omega t),$$

que da la posición lineal del extremo de la barra en función del tiempo. La velocidad de este punto en función del tiempo la obtenemos sin más que derivar

$$v(t) = \dot{x} = \omega A\cos(\omega t).$$

Así la velocidad máxima será cuando $\cos(\omega t) = 1$ y por consiguiente $v_{\max} = \omega A$. Sustituyendo tenemos finalmente.

$$v_{\max} = \frac{L}{100}\sqrt{\frac{32}{45}\frac{g}{L}}.$$

13. **Una esfera hueca de radio exterior R e interior $R/4$, de masa M y densidad volumétrica dada por la función**

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{4(r/R) - 1}{(r/R)^4}$$

con $\rho_0 = M/4\pi R^3$ está suspendida desde un punto de su superficie y se encuentra realizando pequeñas oscilaciones. Determinar:

a) **El momento de inercia I_c de la esfera respecto a un eje que pasa por su centro.**

b) **El momento de inercia I_0 respecto al eje entorno al que oscila situado en su superficie.**

c) **El periodo de oscilación T.**

d) **El radio de la esfera para que ese periodo sea $T = 1$ s.**

Dato: $g = 9{,}81 m/s^2$.

SOLUCIÓN

a) El momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de la esfera se obtiene a partir de su definición

$$I_c = \int r^2 dm,$$

donde el diferencial de masa es $dm = \rho dV$. Usando coordenadas esféricas tenemos que el diferencial de volumen es

$$dV = r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\phi,$$

con lo que

$$\begin{aligned} I_c &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R/4}^{R} \rho_0 \frac{4(r/R) - 1}{(r/R)^4} r^4 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{R/4}^{R} \frac{4(r/R) - 1}{(r/R)^4} r^4 dr \\ &= \frac{9}{8} M R^2. \end{aligned}$$

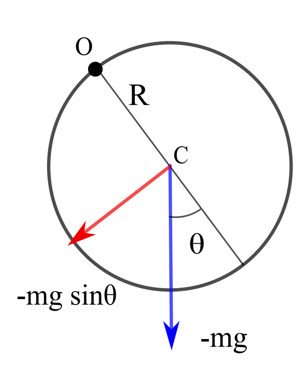
b) Para obtener el momento de inercia respecto a un eje O tangente a la superficie de la esfera debemos darnos cuenta que ese eje es necesariamente paralelo al diámetro de la esfera, por lo que podemos aplicar el teorema de Steiner (o de los ejes paralelos). Así:

$$I_O = I_c + Mh^2,$$

donde h es la distancia entre los dos ejes. En nuestro caso esta distancia es precisamente un radio, R.

$$I_O = I_c + MR^2 = \frac{17}{8}MR^2.$$

c) Para obtener el periodo de oscilación debemos analizar el sistema como un péndulo físico.



La única fuerza que ejerce un torque es la componente transversal del peso, esto es, $-mg\sin\theta$, siendo θ el ángulo respecto a la vertical. Así tendremos

$$\tau = I_O\ddot{\theta},$$

$$-mg\sin\theta R = I_O\ddot{\theta}.$$

Teniendo en cuenta que las oscilaciones son pequeñas podemos aproximar $\sin\theta \approx \theta$ y así la anterior ecuación queda

$$-mg\theta R = I_O\ddot{\theta},$$

que si la ordenamos debidamente,

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgR}{I_O}\theta = -\omega^2\theta,$$

nos permite darnos cuenta de que es la ecuación de un movimiento armónico simple de frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I_O}}$. Teniendo en cuenta que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, obtenemos finalmente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{17}{8}\frac{R}{g}}.$$

d) Para obtener el radio para el cual la esfera oscila con un periodo $T = 1$ s no hay más que despejar e introducir datos numéricos:

$$R = \frac{8}{17}\frac{g}{4\pi^2}T^2 = 11{,}7 \text{ cm}.$$

CAPÍTULO 3

MOVIMIENTO ONDULATORIO

En este tema se resolverán problemas relativos al movimiento ondulatorio, como una continuación y ampliación del movimiento oscilatorio visto en el capítulo anterior. La forma más básica de este movimiento es la onda armónica que presenta doble periodicidad (temporal y espacial). En este movimiento, la energía y el momento lineal se transportan de un punto a otro del espacio sin transportar materia. Además, se presentan problemas relativos a la superposición de ondas obteniéndose un caso particular importante como es el de la onda estacionaria.

Ondas armónicas

Ecuación de ondas	$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$
Función de ondas	$y(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t)$
Potencia de ondas en cuerdas	$P_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mu\nu\omega^2 A^2$
Densidad de energía sonora	$\eta_{\mathrm{m}} = \frac{(\Delta E)_{\mathrm{m}}}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2$
Intensidad de una onda	$I = \frac{P_{\mathrm{m}}}{S}$
Nivel de intensidad sonora	$\beta = 10\log\frac{I}{I_0}, \qquad I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$
Velocidad en cuerdas	$v = \sqrt{F_T/\mu}$
Velocidad sonido	$v = \sqrt{B/\rho}$ (definición) $v = \sqrt{\gamma RT/M}$ (en un gas)

Superposición de ondas

Suma algebraica de dos ondas iguales en desfase	$y_1+y_2 = 2A_0\cos(\delta/2)\sin(kx-\omega t+\delta/2)$
Interferencia constructiva	$\delta = 2n\pi \quad n = 1, 2, 3, ...$
Interferencia destructiva	$\delta = (2n+1)\pi \quad n = 1, 2, 3, ...$
Pulsación o batido	$f_{\text{batido}} = \Delta f$ (frecuencias próximas)
Diferencia de fase por diferencia de trayectos	$\delta = k\Delta x = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}$

Ondas estacionarias

Dos extremos fijos	$L = n\frac{\lambda_2}{2}, \quad n = 1, 2, 3, ...$
Frecuencias permitidas	$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} = nf_1, \quad n = 1, 2, 3...$
Un extremo fijo	$L = n\frac{\lambda_2}{4}, \quad n = 1, 3, 5, ...$
Frecuencias permitidas	$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L} = nf_1, \quad n = 1, 3, 5...$

Otros fenómenos

Efecto Doppler	$f' = f_0\frac{c \pm v_r}{c \mp v_f}$
Ondas de choque: ángulo de Mach	$\sin\theta = c/v$
Ondas de choque: número de Mach	$M = v/c$

Problemas

1. **Demostrar que si las funciones de onda ψ_1 y ψ_2 son soluciones de la ecuación de ondas**

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

la combinación lineal de ambas $\psi_3 = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, siendo c_1 y c_2 dos constantes cualesquiera, también es solución de la ecuación de ondas.

SOLUCIÓN:

Para poder verificar que la función $\psi_3 = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ es solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2},$$

bastará con comprobar que ambos lados de la igualdad anterior son idénticos. Para ello calculamos las segundas derivadas teniendo en cuenta que ψ_3 es combinación lineal de ψ_1 y ψ_2.

Lado izquierdo de la igualdad:

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}.$$

En el enunciado se nos indica que ψ_1 y ψ_2 son soluciones de la ecuación de ondas, por tanto, podemos sustituir su derivada espacial por la temporal con el factor $1/v^2$, esto es:

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} = c_1\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + c_2\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}.$$

Ahora comprobamos el lado derecho de la igualdad.

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + c_2\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}.$$

Los dos resultados coinciden con lo que queda demostrado que la combinación lineal de dos soluciones de la ecuación de ondas es también solución de la misma ecuación.

*Este resultado es muy importante. La ecuación del movimiento de una onda, así como la de un movimiento armónico simple o amortiguado, tiene infinitas soluciones, también llamada familia de soluciones. Para poder obtener una solución particular a un problema específico hay que aplicarle las llamadas **condiciones iniciales** o **condiciones de contorno** en cada caso, lo que nos proporcionará los valores de las constantes quedando totalmente determinado el movimiento.*

2. **Demostrar que la función $\psi(x,t) = Ae^{ik(x-vt)}$, donde A y k son constantes y $i = \sqrt{-1}$, es solución de la ecuación de ondas.**

SOLUCIÓN:

Para demostrar que ψ es solución de la ecuación de ondas sólo tenemos que calcular las segundas derivadas espacial y temporal.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = i\kappa Ae^{i\kappa(x-vt)} \quad ; \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\kappa^2 Ae^{i\kappa(x-vt)} = -\kappa^2\psi.$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\kappa v Ae^{i\kappa(x-vt)} \quad ; \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\kappa^2 v^2 Ae^{i\kappa(x-vt)} = -\kappa^2 v^2\psi.$$

Por lo tanto, se cumple efectivamente que $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$.

3. **La función de una onda armónica que se propaga por una cuerda es**
$$y(x,t) = 0{,}03\sin(2{,}2x - 3{,}5t),$$
donde y y x se miden en metros y t en segundos. Hallar la amplitud, frecuencia, longitud de onda, período y velocidad de la onda.

SOLUCIÓN:

El problema consiste básicamente en identificar los elementos de la función de onda $y(x,t) = A\sin(\kappa x - \omega t)$ con $\kappa = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi/T$. Entonces se puede responder de forma inmediata que:

La amplitud $A = 0{,}03$ m.

La frecuencia $f = T^{-1} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3{,}5}{2\pi}$ Hz.

La longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi}{2{,}2}$ m.

La velocidad $v = \lambda f = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{3{,}5}{2{,}2}$ m/s.

4. **Una onda sinusoidal transversal que se propaga de derecha a izquierda tiene una longitud de onda de 15 m, una velocidad de propagación de 250 m/s y una amplitud de 3 m. Hallar:**

   ***a*) la función de la onda,**

   ***b*) la velocidad y la aceleración máxima de un punto alcanzado por la vibración,**

   ***c*) el periodo, la frecuencia y el número de ondas.**

   SOLUCIÓN:

   a) La forma de la ecuación de una onda que se propaga de derecha a izquierda es
   $$\psi(x,t) = A\sin(\kappa x + \omega t).$$
   A partir de los datos del enunciado podemos obtener los parámetros κ y ω sabiendo que $v = \lambda/T$.
   $$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{15}\,m^{-1},$$
   $$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\frac{v}{\lambda} = \frac{100}{3}\pi\,s^{-1}.$$
   Así tenemos que la función de la onda es:
   $$\psi(x,t) = 3\sin\frac{2\pi}{15}(x + 250t).$$

   b) La velocidad y aceleración máximas se obtienen derivando respecto al tiempo la función de ondas.
   $$\dot{\psi} = \omega A\cos(\kappa x + \omega t) \Rightarrow \dot{\psi}_{max} = \omega A = 100\pi\text{m/s},$$
   $$\ddot{\psi} = -\omega^2 A\sin(\kappa x + \omega t) \Rightarrow |\ddot{\psi}_{max}| = \omega^2 A = \frac{10000}{3}\pi^2\text{m/s}^2.$$

   c) El periodo será $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{3}{50}\,s$ y la frecuencia $f = T^{-1}$. El número de ondas κ ya lo hemos calculado en el primer apartado.

5. **Una cuerda de 5 m de largo que está fija sólo por un extremo está vibrando en su quinto armónico con una frecuencia de 400 Hz. El desplazamiento máximo de cualquier segmento de la cuerda es 3 cm.**

a) **¿Cuál es la longitud de onda?**

b) **¿Cuál es la frecuencia fundamental?**

c) **¿Cuál es el número de ondas?**

d) **¿Cuál es la frecuencia angular?**

e) **Escribir la función correspondiente de esta onda estacionaria.**

SOLUCIÓN:

a) Sabemos que las condiciones en los extremos de una cuerda vibrante fija por un solo extremo obliga a que exista un nodo en el extremo fijo y un vientre en el extremo libre. Esto se traduce en que la función de la onda estacionaria resultante

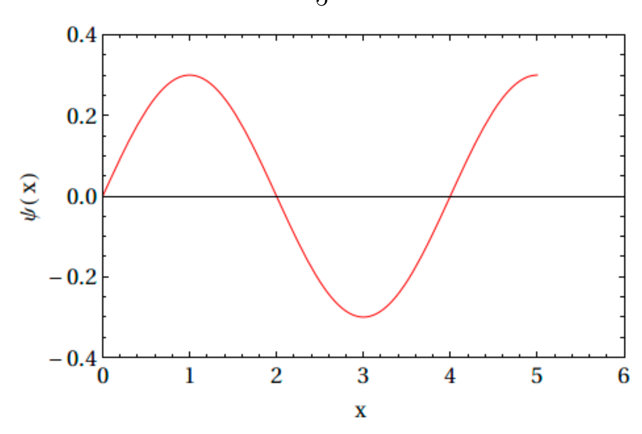
$$\psi(x,t) = A\cos(2\pi f_n t)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right)$$

pueda tomar sólo unos valores determinados de la longitud de ondas λ_n en función del armónico n, de tal manera que se verifique $\psi(x=0,t)=0$ y $\psi(x=L,t)=A\cos(2\pi f_n t)$. Esto implica que[1]:

$$\lambda_n = \frac{4L}{n}, \qquad n = \{1,3,5\dots\}$$

Es interesante notar que un sistema así ha perdido los armónicos pares, cosa que no ocurre con una cuerda fija por ambos extremos. Dado que nos piden la longitud de onda para el quinto armónico $n=5$ no tenemos más que sustituir:

$$\lambda_{n=5} = \frac{4L}{5} = 4 \text{ m}.$$



[1]Se deja como ejercicio comprobar esto.

b) Para obtener la frecuencia del primer armónico debemos tener en cuenta que la velocidad de propagación de la onda $v = \lambda f$ es constante. Esto implica que

$$\lambda_n f_n = \lambda_m f_m$$

para cualquier par de armónicos n y m. Tenemos entonces que

$$f_m = \frac{\lambda_n}{\lambda_m} f_n = \frac{m}{n} f_n.$$

En nuestro caso $n = 5$ y $m = 1$ por lo que

$$f_1 = \frac{\lambda_5}{\lambda_1} f_5 = \frac{f_5}{5} = 80 \text{ Hz}.$$

c) El número de ondas del quinto armónico será

$$\kappa_{n=5} = \frac{2\pi}{\lambda_5} = \frac{\pi}{2} \text{ m}^{-1}.$$

d) La frecuencia angular del quinto armónico será

$$\omega_{n=5} = 2\pi f_5 = 800\pi \text{ rad/s}.$$

e) Con estos parámetros calculados la ecuación de la onda estacionaria de nuestra cuerda fija por un extremo vibrando en el quinto armónico será

$$\psi(x,t) = 0{,}03 \cos(800\pi t) \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right).$$

6. **Sometemos al extremo de una cuerda tensa a un diapasón que le produce vibraciones sinusoidales. Por este efecto se propaga por la cuerda una onda transversal que obedece la función**

$$\psi(x,t) = 10 \sin \pi(1{,}6x - 0{,}8t),$$

expresada en cm.

***a*) ¿Qué condiciones iniciales establece esta función?**

***b*) Determinar su amplitud, velocidad de propagación y longitud de onda.**

c) Calcular el tiempo que tarda en comenzar a vibrar una partícula de la cuerda situada a 10 cm del extremo en que se encuentra el diapasón.

d) Dibujar la forma de la cuerda cuando han transcurrido 5,625 s del comienzo de la vibración (perfil de la onda).

SOLUCIÓN:

a) Las condiciones iniciales son la elongación, velocidad y aceleración correspondientes a $t = 0$ en el punto $x = 0$. Para ello calculamos las derivadas primera y segunda $(\partial\psi/\partial t)$ y $(\partial^2\psi/\partial t^2)$ y obtenemos su valor numérico.

$$\psi(0,0) = 0 \text{ cm},$$

$$\dot{\psi}(0,0) = -8\pi \text{ cm/s},$$

$$\ddot{\psi}(0,0) = 0 \text{ cm/s}^2.$$

b) Amplitud: $A = 10$ cm.
Longitud de onda: $\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi}{1{,}6\pi} = 1{,}25$ cm.
Velocidad: $v = \lambda f = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{0{,}8\pi}{1{,}6\pi} = 0{,}5$ cm/s.

c) Para determinar el tiempo que tarda en llegar la onda viajera a un punto en la cuerda situado a 10 cm del origen simplemente debemos usar la ecuación de la velocidad $v = s/t$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10}{0{,}5} = 20 \text{ s}.$$

d) Para poder dibujar el perfil de la onda debemos averiguar el valor de la elongación en el origen en el instante $t = 5{,}5625$ s, determinar qué distancia se ha propagado la onda y cuántos nodos hay desde el origen hasta ese punto.

$$\psi(x = 0; t = 5{,}5625) = -10 \text{ cm},$$

$$x = vt = 0{,}5 \cdot 5{,}5625 = 2{,}8125 \text{ cm}.$$

Para obtener los nodos debemos encontrar los valores de x para los que $\psi = 0$, esto es, aquellos para los que $\sin[\pi(1{,}6x - 4{,}5)] = 0$. Esto solo se verifica si el valor del interior del paréntesis es un número entero n.

$$1{,}6x - 4{,}5 = n$$

$$x = \frac{n + 4{,}5}{1{,}6}.$$

Dando valores positivos a n comprobaríamos que los nodos se encontrarían en puntos donde aún no se ha propagado la onda $x > 2{,}8125$ cm lo cual es absurdo. Buscamos por tanto a la izquierda de ese punto dando valores negativos empezando con $n = 0$.

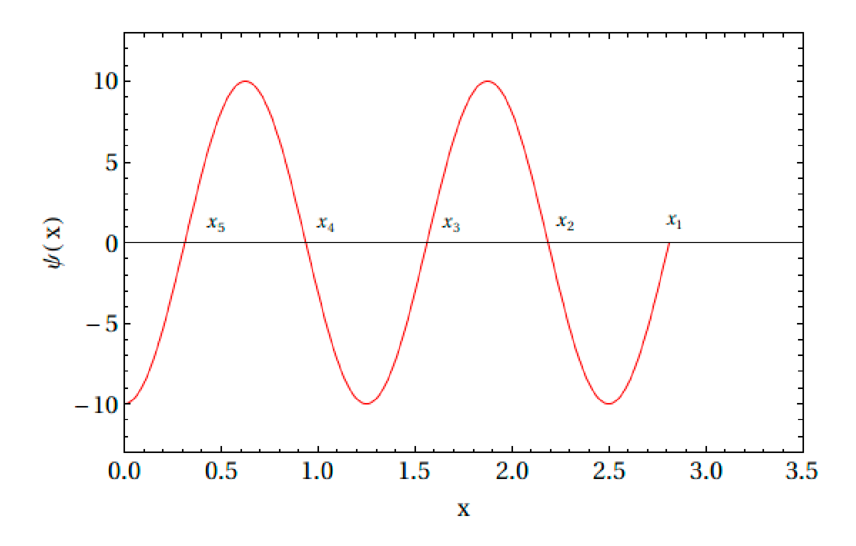
$$n = 0 \rightarrow x_1 = 4{,}5/1{,}6 = 2{,}8125 \text{ cm},$$

$$n = -1 \rightarrow x_2 = 3{,}5/1{,}6 = 2{,}1875 \text{ cm},$$

$$n = -2 \rightarrow x_3 = 2{,}5/1{,}6 = 1{,}5625 \text{ cm},$$

$$n = -3 \rightarrow x_4 = 1{,}5/1{,}6 = 0{,}9375 \text{ cm},$$

$$n = -4 \rightarrow x_5 = 0{,}5/1{,}6 = 0{,}3125 \text{ cm}.$$



7. **Ondas de longitud de onda 35 cm y amplitud 1,2 cm se mueven a lo largo de una cuerda de 15 m que tiene una masa de 80 g y está sometida a una tensión de 12 N. Hallar:**

   a) **La energía total de las ondas en la cuerda.**

   b) **La potencia transmitida que pasa por un punto dado de la cuerda.**

SOLUCIÓN:

a) Podemos ver la onda en la cuerda como una sucesión de pequeños osciladores de masa Δm. Como ya vimos en el tema anterior, la energía de un oscilador de masa m viene dada por

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2.$$

Así que para nuestro pequeño oscilador de masa Δm tenemos

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \Delta x,$$

donde $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{0{,}08 \text{ kg}}{15 \text{ m}} = 5{,}33 \cdot 10^{-3}$ kg/m es la densidad lineal de la cuerda.

El valor de ω puede obtenerse a partir de los datos del enunciado si nos damos cuenta de que:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{v}{\lambda}$$

y

$$v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} = \sqrt{\frac{12 \text{ N}}{5{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}}} = 47{,}4 \text{ m/s},$$

con lo que

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{47{,}4 \text{ m/s}}{0{,}35 \text{ m}} = 851 \text{ rad/s}.$$

La energía total de las ondas sobre la cuerda será entonces

$$\Delta E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \Delta x = 4{,}17 \text{ J}.$$

b) La potencia transmitida es la energía transmitida por unidad de tiempo:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v = 13{,}2 \text{ W}.$$

8. **Dos ondas armónicas de igual frecuencia y amplitud, $f = 50$ Hz, $A = 2$ cm, viajan a la velocidad de 1 m/s y en sentido positivo del eje OX, existiendo entre ellas una diferencia de fase de $\pi/3$. Deducir la ecuación de la onda resultante de la interferencia entre las dos y la ecuación del movimiento de una partícula que se encuentra a 20 cm del origen sobre el eje OX.**

SOLUCIÓN:

a) Para hallar la ecuación de la onda interferencia resultante no tendremos más que sumar las correspondientes a las ondas originales, $\psi_3 = \psi_1 + \psi_2$.

Dado que las dos ondas iniciales tienen igual frecuencia, velocidad y amplitud pero diferen en la fase $\phi = \pi/3$, las ecuaciones de cada una de ellas serán:

$$\psi_1(x,t) = A\sin(\kappa x - \omega t),$$

$$\psi_2(x,t) = A\sin(\kappa x - \omega t + \phi),$$

$$\psi_3 = \psi_1 + \psi_2 = A\sin(\kappa x - \omega t) + A\sin(\kappa x - \omega t + \phi).$$

Sabiendo que

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

y $\cos(-a) = \cos(a)$ tenemos:

$$\psi_3 = 2A\cos(\phi/2)\sin(\kappa x - \omega t + \phi/2).$$

Teniendo en cuenta que $\lambda = v/f = 2$ cm, podemos determinar los parámetros $\kappa = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi f$.

Así la función de la onda resultante será:

$$\psi_3(x,t) = 2\sqrt{3}\sin 2\pi\left(\frac{x}{2} - 50t + \frac{1}{12}\right)$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

b) Las funciones que describen el movimiento de una partícula que se encuentre en $x = 20$ cm serán:

$$\psi_3(20,t) = 2\sqrt{3}\sin 2\pi\left(\frac{121}{12} - 50t\right),$$

$$\dot{\psi}_3(20,t) = -200\sqrt{3}\pi\cos 2\pi\left(\frac{121}{12} - 50t\right),$$

$$\ddot{\psi}_3(20,t) = -20000\sqrt{3}\pi^2\sin 2\pi\left(\frac{121}{12} - 50t\right).$$

9. **La frecuencia de la bocina de un coche es 400Hz. ¿Qué frecuencia se observa si el coche se mueve en el aire en reposo hacia el receptor estacionario con una velocidad de 120 km/h? ¿Qué frecuencia se mediría si ahora fuera el observador el que se mueve hacia el coche con esa velocidad?**

Dato: Considera la velocidad del sonido $c = 343\ m/s$

SOLUCIÓN:

Cuando el coche (fuente) se mueve respecto al receptor (o viceversa), se produce una variación entre la frecuencia emitida y recibida que depende de la velocidad. Cuando fuente y receptor se acercan, la frecuencia percibida por el receptor aumentará, mientras que disminuirá si se alejan. La expresión general de esta variación de frecuencia por efecto Doppler es

$$f' = f_0\left(\frac{c \pm v_r}{c \mp v_f}\right), \tag{9.1}$$

donde v_r, v_f y c con las velocidades del receptor, fuente y sonido respectivamente. Los signos $(+, -)$ superior e inferior se usan cuando fuente y receptor se acercan o se alejan entre sí respectivamente.

a) En el primer caso es la fuente la que se mueve con una velocidad $v_f = 120$ km/h $= 34$ m/s acercándose al receptor que permanece en reposo $v_r = 0$. Entonces la ecuación para la frecuencia Doppler queda

$$\begin{aligned} f' &= f_0\left(\frac{c}{c - v_f}\right) = f_0\left(\frac{1}{1 - v_f/c}\right) \\ &= 400\text{ Hz}\left(\frac{1}{1 - \frac{34\text{ m/s}}{343\text{ m/s}}}\right) = 444\text{ Hz.} \end{aligned}$$

b) En el segundo caso es el receptor el que se acerca con velocidad $v_f = 34$ m/s a la fuente que permanece en reposo. Por tanto la ecuación de la frecuencia Doppler queda

$$f' = f_0 \left(\frac{c + v_r}{c} \right) = f_0 \left(1 + \frac{v_r}{c} \right) = 400 \text{ Hz} \left(1 + \frac{34 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}} \right) = 440 \text{ Hz}.$$

Es importante darse cuenta de que no se obtiene la misma frecuencia aunque la velocidad relativa en ambos casos es la misma. *Se concluye que el efecto Doppler distingue entre el movimiento de la fuente o el receptor. Depende del movimiento absoluto de cada uno ellos en lugar del movimiento relativo.*

10. **La eco-localización es el uso de ondas sonoras y su eco en objetos para determinar su ubicación en el espacio. Los murciélagos usan la eco-localización para navegar y encontrar comida en la oscuridad. Un hambriento murciélago persigue con velocidad de 13 m/s una jugosa polilla que se encuentra inicialmente a 6 m de él detectándola mediante eco-localización. La polilla huye desesperadamente en línea recta en dirección opuesta al murciélago hacia un agujero en una cercana pared situada a 1 m donde podría salvar la vida.**
Si la frecuencia del eco que escucha el murciélago es un 6,4 % mayor que la frecuencia del sonido que emite, determina si se salvará la polilla o servirá de almuerzo al murciélago.

Nota: Considerar que el murciélago y la polilla se mueven en línea recta y con velocidades constantes.

Dato: Velocidad del sonido $c = 343$ *m/s.*

SOLUCIÓN:

El cambio en la frecuencia Doppler está dado en la expresión (9.1). El sonido que emite el murciélago recorrerá dos trayectorias en las que sufrirá un cambio de frecuencia en cada una de ellas. En el primer trayecto el sonido viaja hacia la polilla. En este caso el emisor (murciélago) se acerca con velocidad v_m y el receptor (polilla) se aleja con velocidad v_p. El cambio de frecuencia será

$$f' = f_0 \left(\frac{c - v_p}{c - v_m} \right).$$

En el segundo trayecto el sonido reflejado en la polilla viaja hacia el murciélago. En este caso el emisor (ahora la polilla) se aleja mientras que el receptor (murciélago) se acerca. La frecuencia será

$$f = f' \left(\frac{c + v_m}{c + v_p} \right) = f_0 \left(\frac{c - v_p}{c - v_m} \right) \left(\frac{c + v_m}{c + v_p} \right).$$

Operando un poco sobre esta expresión, y teniendo en cuenta que nuestra incógnita es la velocidad de la polilla v_p obtenemos:

$$\frac{c - v_p}{c + v_p} = \frac{f}{f_0} \left(\frac{c - v_m}{c + v_m} \right). \quad (10.1)$$

Se puede ver ahora que el miembro derecho de la igualdad es una constante. Por simplicidad renombraremos

$$k = \frac{f}{f_0} \left(\frac{c - v_m}{c + v_m} \right),$$

y así podemos despejar la velocidad de la polilla de la ecuación (10.1)

$$v_p = c \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right).$$

Introduciendo datos numéricos, teniendo en cuenta que, según el enunciado, $f = 1{,}0064 f_0$, obtenemos

$$v_p = 2{,}367 \text{ m/s}.$$

El tiempo que tarda la polilla en alcanzar el agujero situado a una distancia $s_p = 1$ m es

$$t_p = \frac{s_p}{v_p}.$$

La distancia que cubre el murciélago en ese mismo intervalo tiempo es

$$s_m = v_m t_p = s_p \frac{v_m}{v_p}.$$

Introduciendo datos numéricos:

$$s_m = 5{,}5 \text{ m}.$$

Como inicialmente la polilla se encontraba a una distancia de 6 m del murciélago y éste sólo llega a volar una distancia de 5,5 m antes de que la polilla alcance el agujero se puede concluir que en esta ocasión el murciélago se quedará con hambre.

11. **En la prueba de un nuevo prototipo de armadura supersónica, Tony Stark (Ironman), está volando a Mach 2 a una altitud de 5000 m.**

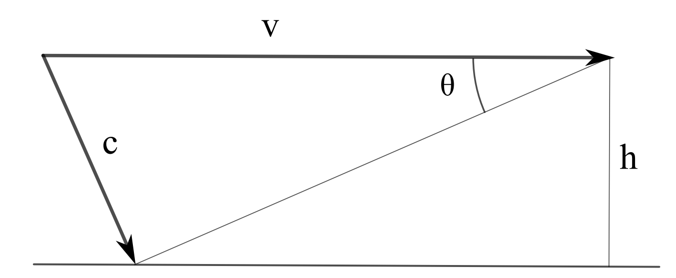
   ***a*) ¿Cuál es el ángulo de la onda de choque que forma con la trayectoria de Ironman?**

   ***b*) ¿A qué distancia se encontrará de la vertical de una persona en el suelo cuando oiga la onda de choque?**

Dato: Considerar la velocidad del sonido $c = 340$ *m/s.*

SOLUCIÓN:

a) Sabemos que al moverse por un medio a una velocidad superior a la velocidad del sonido en ese medio ($v > c$) se produce una onda de choque compuesta por las ondas sonoras que se van acumulando en un frente común. Este frente forma un ángulo con la trayectoria de Ironman que verificará $\sin\theta = c/v$.



Dado que el número de Mach se define como $M = v/c$ podemos deducir que

$$\sin\theta = M^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Por lo que

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°.$$

b) En el momento en el que Ironman pasa por la vertical de un observador situado en el suelo, las ondas sonoras que genera se desplazan a la velocidad del sonido y recorrerán el espacio h que separa

Ironman y el observador en un tiempo

$$t = \frac{h}{c}.$$

Por otra parte, en ese tiempo que ha empleado el sonido en llegar al observador, Ironman se habrá desplazado horizontalmente una distancia igual a

$$r = vt = v\frac{h}{c} = Mh = 10000 \text{ m}.$$

Como se puede ver, en este problema en realidad nunca nos hizo falta el valor de la velocidad del sonido ya que sólo necesitábamos conocer la relación que había entre la velocidad de Ironman y la del sonido, esto es, el número de Mach.

Como ejercicio se plantea intentar calcular la velocidad de Ironman volando en Mach 2 en otras atmósferas extraterrestres donde las velocidades del sonido sean 0,8 *y* 1,5 *veces la terrestre.*

12. Unos estudiantes deciden irse de excursión de fin de curso a un planeta desconocido. Como son muy curiosos pretenden averiguar la aceleración de la gravedad en ese planeta. Para ello hacen oscilar una bolita de plomo de masa m y radio despreciable de un cable de longitud L con una amplitud de oscilación A describiendo un movimiento armónico simple. Con ayuda de un aparato de ultrasonidos miden la velocidad de la bolita mediante efecto Doppler. Obtienen que en el momento de máxima velocidad, con la bolita acercándose al detector, la diferencia de frecuencias emitida y recibida es de un $0{,}05\,\%$ de la emitida, esto es $\Delta f = f - f_0 = 0{,}0005 f_0$. ¿Cuál es el valor de la gravedad en este planeta?

Datos: $L = 10$ *m,* $A = 10$ *cm, velocidad del sonido* $c = 343$ *m/s.*

SOLUCIÓN

Para obtener la gravedad del planeta primero tenemos que caracterizar el movimiento del péndulo.

El peso de la bolita ejercerá un torque sobre el eje de rotación que será

$$\tau = I\alpha,$$

$$-Lmg \sin\theta = I\ddot{\theta}.$$

Como las oscilaciones son muy pequeñas, ya que $A \ll L$, podemos usar la aproximación $\sin\theta \approx \theta$ obteniendo así la ecuación de un movimiento armónico simple:

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgL}{I}\theta.$$

Tomando el radio de la bolita como despreciable podemos considerarla como una masa puntual y por tanto su momento de inercia respecto al eje de oscilación es simplemente $I = mL^2$. Entonces la ecuación anterior queda:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta.$$

Si multiplicamos ambos lados por L obtenemos:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}x,$$

cuya solución es

$$x(t) = A \sin\omega t,$$

con $\omega = \sqrt{g/L}$ y la velocidad de la bolita en función del tiempo será:

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos\omega t.$$

La velocidad máxima se dará cuando la bolita pase por su punto de equilibrio ($\cos\theta = 1$), esto es, $\dot{x}_{\max} = \omega A$. Este dato de momento es desconocido, sin embargo los estudiantes son capaces de determinarlo mediante una medición del efecto Doppler.

En la determinación de la velocidad por efecto Doppler hay que tener en cuenta que la frecuencia que recibe el detector sufre dos variaciones, una en el viaje de ida hacia la bolita y otra en el viaje de vuelta al detector.

En el primer trayecto el emisor (aparato de ultrasonidos) está en reposo mientras que el receptor (bolita) se acerca con velocidad u_b. Así, la frecuencia que llega a la bolita será

$$f' = f_0 \left(\frac{c + u_b}{c} \right).$$

En el trayecto de vuelta al detector, el emisor es ahora la bolita que se acerca con velocidad u_b y el receptor es el aparato de ultrasonidos que está en reposo. Así la frecuencia que llega al detector es.

$$f = f' \left(\frac{c}{c - u_b} \right) = f_0 \left(\frac{c + u_b}{c - u_b} \right).$$

Operando un poco con esta expresión podemos despejar la velocidad de la bolita en función de las frecuencias emitida y recibida.

$$u_b = c \left(\frac{f - f_0}{f + f_0} \right).$$

Teniendo en cuenta que $\Delta f = f - f_0$ entonces

$$u_b = c \left(\frac{\Delta f}{\Delta f + 2f_0} \right).$$

Identificando $\dot{x}_{\max} = u_b$ tenemos que

$$A\sqrt{\frac{g}{L}} = c \left(\frac{\Delta f}{\Delta f + 2f_0} \right),$$

de donde podemos despejar fácilmente la gravedad del planeta:

$$g = L \left(\frac{c}{A} \right)^2 \left(\frac{\Delta f}{\Delta f + 2f_0} \right)^2.$$

Introduciendo datos numéricos y teniendo en cuenta que $\Delta f = 0{,}0005 f_0$ llegamos a:

$$g = 7{,}35 \text{ m/s}^2.$$

CAPÍTULO 4

ORÍGENES DE LA FÍSICA CUÁNTICA

La naturaleza dual de la luz propagándose como una onda e interactuando con la materia como si fuera una partícula se analiza en este tema, con problemas derivados de experimentos tales como el efecto fotoeléctrico o la dispersión Compton entre otros. Además, la función de onda asociada a un electrón permite introducir la teoría probabilística de la Mecánica Cuántica donde se calculan los valores esperados de encontrar una partícula o una función en una región del espacio.

Radiación del cuerpo negro

Ley de Wien	$\lambda_{\max} = \dfrac{2{,}898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T}$
Ley de Stefan-Boltzmann	$P = \sigma T^4$
Ley de Rayleigh-Jeans	$I(\lambda, T) = \dfrac{2\pi ckT}{\lambda^4}$
Hipótesis de Plank	$I(\lambda, T) = \dfrac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(\exp[hc/\lambda kT] - 1\right)}$

Interacción luz-materia

Efecto fotoeléctrico	$K_{\max} = h\nu - W_0$
Efecto Compton	$\lambda_f - \lambda_i = \dfrac{hc}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$

Dualidad onda-partícula

Energía del fotón	$E = h\nu$
Momento lineal del fotón	$p = E/c = h/\lambda$
Longitud de onda de de Broglie	$\lambda = h/p$

Principio de indeterminación

Momento y posición	$\Delta p\ \Delta x \geq \frac{1}{2}\hbar$
Energía y tiempo	$\Delta E\ \Delta t \geq \frac{1}{2}\hbar$

Interpretación probabilística de la Mecánica Cuántica

Densidad de probabilidad	$P(x)dx = \Psi^2(x)dx$
Condición de normalización	$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(x)dx = 1$
Valor esperado	$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Psi^2(x)dx$

Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

1D $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

3D $$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(\vec{r})}{\partial z^2}\right] + U(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

Ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]+U(r)\psi=E\psi$$

Energías de estados cuánticos

Pozo cuadrado infinito	$E_n = n^2\dfrac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} = n^2E_0$
Caja 3D	$E_{n_x,n_y,n_z} = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{8m}\left(\dfrac{n_x^2}{L_x^2}+\dfrac{n_y^2}{L_y^2}+\dfrac{n_z^2}{L_z^2}\right) = n^2E_0$

Problemas

1. **La potencia de radiación de un cuerpo negro de superficie $0{,}6\,\mathbf{m}^2$ es $P_t = 34\,\mathbf{kW}$. Hallar la temperatura de este cuerpo negro y la frecuencia de la radiación máxima emitida.**

   SOLUCIÓN

   Si P_t es la potencia total radiada por todo el cuerpo negro debemos encontrar la potencia radiada por unidad de superficie:

   $$P = \frac{P_t}{A}.$$

   Según la Ley de Stefan-Boltzmann, la temperatura del cuerpo negro se relaciona con la potencia radiada por unidad de superficie como:

   $$P = \epsilon\sigma T^4 = \sigma T^4,$$

   recordando que para el cuerpo negro su emisividad $\epsilon = 1$. Así la temperatura de este cuerpo negro será:

   $$T = \sqrt[4]{\frac{P_t}{A\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{34 \times 10^3\,\mathrm{W}}{0{,}6\,\mathrm{m}^2 \cdot 5{,}669 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}}} = 1000\,\mathrm{K}.$$

   Para obtener la frecuencia de la radiación máxima primero aplicamos la Ley de Desplazamiento de Wien:

   $$\lambda_{max} = \frac{2867,6\,\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{T} = 2,8676\,\mu\mathrm{m},$$

   y finalmente, teniendo en cuenta la relación de la longitud, frecuencia y velocidad de la luz tenemos:

   $$\nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{max}} = \frac{2{,}99792458 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{2{,}8676 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}} = 1{,}04 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}.$$

2. **Deducir la Ley de Stefan-Boltzmann partiendo de la ecuación de Plank para la radiación del cuerpo negro en función de la temperatura y longitud de onda**

   $$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT} - 1)}.$$

Nota: $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$.

SOLUCIÓN

La ecuación de Plank nos da la intensidad de radiación por unidad de superficie en función de la longitud de onda y la temperatura. Por otro lado, la Ley de Stefan-Boltzmann determina la intensidad de radiación por unidad de superficie total en función de la temperatura $P(T) = \sigma T^4$. Para poder obtener esta última a partir de la ecuación de Plank, deberemos integrar esta última para todas las longitudes de onda:

$$P(T) = \int I(\lambda, T)d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT} - 1)}d\lambda. \qquad (2.1)$$

Para calcular esta integral es conveniente trabajar con frecuencias en lugar de longitudes. Teniendo en cuenta que $\lambda = c/\nu$ tendremos el diferencial $d\lambda = |J(\lambda, \nu)|d\nu$, donde

$$|J(\lambda, \nu)| = \left|\frac{\partial\lambda}{\partial\nu}\right| = \frac{c}{\nu^2}$$

es el Jacobiano de la transformación. Así podemos escribir la ecuación (2.1) en función de las frecuencias ν de la siguiente manera:

$$P(T) = \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{(e^{h\nu/kT} - 1)}d\nu. \qquad (2.2)$$

Para facilitar el cálculo de esta integral introducimos el cambio de variable:

$$x = \frac{h\nu}{kT} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{kT}{h}x,$$
$$dx = \frac{h}{kT}d\nu \quad \Rightarrow \quad d\nu = \frac{kT}{h}dx.$$

Sustituyendo en la integral nos queda:

$$P(T) = \frac{2\pi k^4T^4}{c^2h^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{(e^x - 1)}dx.$$

El resultado de última integral, que se puede obtener analíticamente, ya está dado en la nota del enunciado $\pi^4/15$. Por lo tanto:

$$P(T) = \frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}T^4 = \sigma T^4.$$

Queda como ejercicio introducir los datos numéricos de las constantes implicadas (que están dadas en el Anexo A al final de este libro) y comprobar que la constante de Stefan-Boltzmann vale precisamente $\sigma = 5{,}667 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}$.

3. **Partiendo de nuevo de la ecuación de Plank para la radiación del cuerpo negro en función de la temperatura y longitud de onda del ejercicio anterior deducir la Ley de Desplazamiento de Wien.**

   Nota: La solución de la ecuación transcendente $e^{-x} + \frac{1}{5}x - 1 = 0$ *puede aproximarse como* $x \approx 5(1 - e^{-5}) \approx 4{,}956$.

SOLUCIÓN

La Ley de Desplazamiento de Wien nos da la longitud de onda para la que la radiación del cuerpo negro a una temperatura dada es máxima:

$$\lambda_m = \frac{2897{,}8\,\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{T}.$$

De nuevo, partiendo de la ecuación de Planck

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT} - 1)},$$

debemos encontrar el valor de λ_m para el que su derivada respecto a λ se anula,

$$\left.\frac{dI(\lambda, T)}{d\lambda}\right|_{\lambda_m} = 0.$$

Haciendo un poco de cálculo tenemos que

$$\frac{dI(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{-5kT\lambda(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1) + hce^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{\lambda^7 kT(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1)^2} = 0.$$

Esta igualdad se verificará cuando el numerador sea cero, esto es,

$$-5kT\lambda(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1) + hce^{\frac{hc}{\lambda kT}} = 0.$$

Dividiendo todo por $e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$, reordenando términos y haciendo el cambio de variable $x = \frac{hc}{kT\lambda}$ tenemos:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} + \frac{hc}{5kT\lambda} - 1 &= 0, \\ e^{-x} + \frac{1}{5}x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Usando el resultado de la nota del enunciado tenemos que

$$x = \frac{hc}{kT\lambda_m} \approx 4{,}956,$$

con lo que

$$\lambda_m = \frac{1}{4{,}956}\,\frac{hc}{kT}.$$

Queda como ejercicio introducir los valores numéricos de las constantes y verificar la Ley de Wien.

4. **Calcular la energía de un cuanto de luz visible monocromática de longitud de onda de 6000 Å. Calcular el número de cuantos de esta longitud de onda que emite por segundo una fuente de 100 W.**

SOLUCIÓN

La energía de un cuanto de luz está dada por

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Sustituyendo los valores $hc = 1{,}988 \times 10^{-25}$ J · m y $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m, se obtiene

$$E = 3{,}313 \times 10^{-19} \text{ J} = 2{,}07 \text{ eV}.$$

Como la potencia de la lámpara es de 100 W, radia 100 J por segundo y el número de cuantos por segundo es:

$$N = \frac{\text{potencia}}{\text{energía de un cuanto}} = \frac{100 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}}{3{,}313 \times 10^{-19} \text{ J}} = 3{,}018{\times}10^{20} \text{ cuantos/s}.$$

5. **Un haz de luz ultravioleta de longitud de onda $\lambda = 3500\,$Å incide sobre una superficie de potasio. Se observa que la energía máxima de los fotoelectrones emitidos es de $1{,}6\,$eV. Calcular la función de trabajo del potasio y la longitud de onda umbral para la que habrá efecto fotoeléctrico.**

SOLUCIÓN

En el efecto fotoeléctrico un fotón es absorbido completamente por un electrón de la superficie metálica de tal manera que cuando se emite un electrón desde la superficie del metal su energía cinética es

$$K = h\nu - W,$$

donde W es el trabajo necesario para sacar al electrón del metal, es decir, el trabajo necesario para superar tanto los campos atractivos de los átomos en la superficie como las pérdidas de energía cinética del electrón debidas a sus colisiones con los átomos de la placa en su trayecto a la superficie. En el caso en el que el electrón reciba toda la energía absorbida por el átomo y las pérdidas por colisión sean despreciables, el fotoelectrón emergerá con la energía cinética máxima $K_{\rm max} = h\nu - W_0$, donde W_0 es la función trabajo del metal, que representa la energía mínima necesaria para que un fotoelectrón llegue a la superficie del metal y escape:

$$W_0 = h\nu - K_{\rm max}.$$

La frecuencia del haz ultravioleta del problema es:

$$\nu = c/\lambda = 8{,}571 \times 10^{14}\,{\rm s}^{-1},$$

con lo que la función de trabajo del potasio será:

$$W_0 = 3{,}116 \times 10^{-19}\ {\rm J} = 1{,}945\ {\rm eV}.$$

De este resultado se sigue que la longitud de onda umbral (o de corte) del potasio es:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = 6{,}379 \times 10^{-7}\ {\rm m} = 6379\ {\rm Å}.$$

No se producirá efecto fotoeléctrico si se ilumina el metal con luz cuya longitud de onda sea mayor que λ_0.

6. **Calcular la variación porcentual en la longitud de onda de fotones cuya energía inicial sea 20 keV dispersados por efecto Compton con un ángulo de $\theta = 60°$.**

SOLUCIÓN

La variación en la longitud de onda por la desviación Compton viene determinada por

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{hc}{mc^2}(1 - \cos\theta), \tag{6.1}$$

donde

$$\frac{hc}{mc^2} = \lambda_C$$

es la denominada *longitud de onda de Compton* y es única para cada partícula, pues depende de su masa. Así, para el electrón:

$$\lambda_C = \frac{hc}{m_e c^2} = \frac{1240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{0{,}511 \times 10^6\,\text{eV}} = 2{,}43 \times 10^{-12}\,\text{m} = 2{,}43\,\text{pm}.$$

Con esto, la variación en la longitud de onda será:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = (2{,}43\text{pm})(1 - \cos 60°) = 1{,}22\,\text{pm}.$$

Teniendo en cuenta que $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, la longitud de onda de los fotones incidentes a 20 keV es:

$$\lambda_1 = \frac{hc}{E} = \frac{1240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{20000\,\text{eV}} = 0,062\text{nm} = 62\text{pm},$$

por tanto, la variación porcentual en la longitud de onda será:

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1{,}22\,\text{pm}}{62\text{pm}} \times 100\,\% \approx 2\,\%.$$

7. **Un fotón con energía de 100 MeV colisiona con un protón en reposo. Calcular la pérdida máxima de energía del fotón debido al efecto Compton. Realizar el mismo cálculo cuando choca con un electrón en reposo.**

SOLUCIÓN

La variación en la longitud de onda del fotón dispersado por efecto Compton está dado por la ecuación (6.1). Dado que la longitud de onda de un fotón es $\lambda = \frac{hc}{E}$, esta ecuación puede escribirse como:

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{m_0c^2}(1-\cos\theta),$$

que reordenando convenientemente,

$$\frac{E_0 - E}{E_0 E} = \frac{1}{m_0c^2}(1-\cos\theta), \tag{7.1}$$

con lo que podemos despejar E en función de la energía incial y el ángulo de dispersión:

$$E = E_0 \frac{m_0c^2}{m_0c^2 + E_0(1-\cos\theta)}. \tag{7.2}$$

Si definimos la energía perdida por el fotón como $\Delta E = E_0 - E$ e introducimos (7.2) en (7.1) se obtiene:

$$\Delta E = \frac{(1-\cos\theta)E_0^2}{m_0c^2 + (1-\cos\theta)E_0}, \tag{7.3}$$

que nos da la energía perdida por el fotón en función de su energía inicial E_0 y del ángulo de dispersión θ.

Para obtener, por tanto, la pérdida máxima de energía de un fotón de energía inicial $E_0 = 100$ MeV debemos encontrar antes el ángulo de dispersión para el cual ocurre esta pérdida máxima. Bastará con aplicar la condición de *máximo* a la ecuación (7.3), esto es, encontrar los valores de θ para el que su derivada respecto a θ se anula.

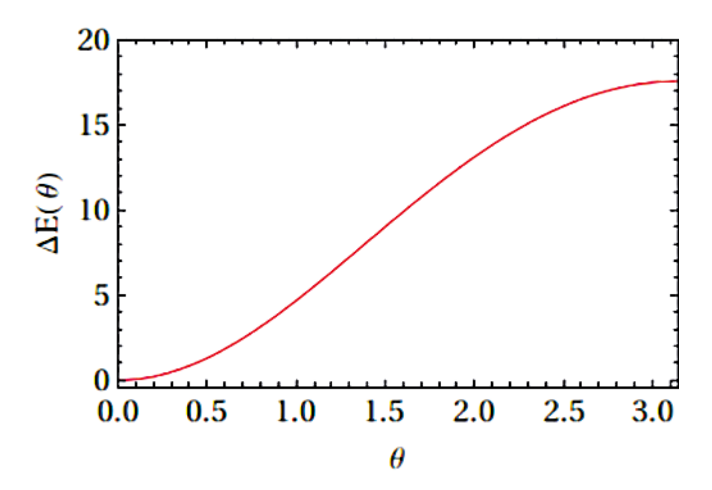
$$\begin{aligned}\frac{d\Delta E}{d\theta} &= \frac{E_0^2 \sin\theta[m_0c^2 + (1-\cos\theta)E_0] - E_0 \sin\theta(1-\cos\theta)E_0^2}{[m_0c^2 + (1-\cos\theta)E_0]^2} \\ &= \frac{E_0^2 m_0c^2 \sin\theta}{[m_0c^2 + (1-\cos\theta)E_0]^2}.\end{aligned}$$

Esta expresión se anula en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (7.3) se tiene que para $\theta = 0$, $\Delta E = 0$, con lo cual es claro que no se trata de un máximo de energía perdida. Por otro lado, para $\theta = \pi$ se tiene que

$$\Delta E_{max} = \frac{2E_0^2}{m_0c^2 + 2E_0}.$$

Para un fotón con energía inicial $E_0 = 100MeV$ que choca con un protón de masa en reposo $m_0 = 938$ MeV/c^2 se tendrá entonces

$$\Delta E_{max} = \frac{2 \times 10^4}{938 + 200} = 17,6 \text{ MeV}.$$



En la gráfica se puede observar como varía esta pérdida de energía ΔE con el ángulo de dispersión θ.

Si el fotón colisiona con un electrón, cuya masa en reposo es $m_0 = 0,511$ MeV/c^2, se tendrá entonces:

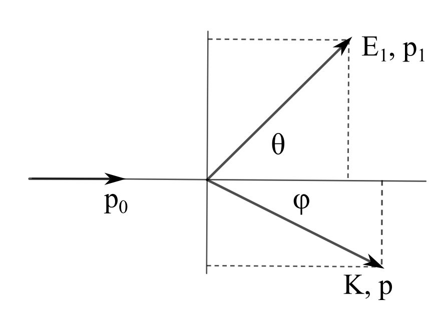
$$\Delta E_{max} = \frac{2 \times 10^4}{0,511 + 200} = 99,75 \text{ MeV}.$$

Es intersante darse cuenta de que en la colisión con un electrón, el fotón pierde casi toda su energía.

8. **Un fotón de 100 MeV interacciona con un electrón inicialmente en reposo y es dispersado un ángulo $\theta = 45°$ respecto a la dirección de incidencia. Calcular la energía de cada partícula después de la colisión y determinar la dirección de salida del electrón.**

SOLUCIÓN

Antes de que tenga lugar la colisión, la energía del fotón incidente es $E_0 = 100$ MeV, mientras que el electrón sólo posee su energía de reposo $m_e c^2$. Tras la colisión, el fotón es dispersado a 45° con respecto a la dirección de incidencia con energía E_1 y momento p_1. Por otro lado, el electrón adquiere energía cinética K y momento p, y es dispersado a un ángulo ϕ con respecto a la dirección de incidencia del fotón. Planteemos las ecuaciones de conservación del momento lineal a lo largo de los ejes X e Y.



$$OX: \; p_0 = p_1 \cos\theta + p\cos\phi,$$

$$OY: \; 0 = p_1 \operatorname{sen}\theta - p \operatorname{sen}\phi.$$

Elevando al cuadrado cada igualdad y despejando se tiene:

$$p^2 = p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos\theta + p_1^2. \tag{8.1}$$

Por otro lado, la ley de conservación de la energía total conduce a

$$E_0 + m_e c^2 = E_1 + K + m_e c^2,$$

con lo que

$$E_0 = E_1 + K.$$

Como la masa en reposo del fotón es cero, su energía y momento están relacionados a través de la expresión $E = pc$, lo que permite escribir $E_0 = p_0 c$ y $E_1 = p_1 c$, y como consecuencia,

$$K = c(p_0 - p_1). \tag{8.2}$$

Por otra parte, hemos escrito la energía total del electrón después de la colisión como

$$E = K + m_e c^2, \tag{8.3}$$

pero sabemos que en términos del momento la energía sigue la famosa ecuación de Einstein

$$E^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2, \quad (8.4)$$

así que elevando al cuadrado (8.3) e igualando a (8.4) tenemos

$$p^2 = \frac{K^2}{c^2} + 2m_e K, \quad (8.5)$$

que nos proporciona el momento en función de la energía cinética.

Insertando (8.5) en (8.1) y teniendo en cuenta (8.2) llegamos a

$$2m_e c(p_0 - p_1) = 2p_1 p_0(1 - \cos\theta).$$

Operando se sigue que

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

de donde podemos despejar el momento del fotón dispersado (p_1) en función del momento del fotón incidente (p_0) y del ángulo de dispersión:

$$p_1 = \left(\frac{1}{p_0} + \frac{1 - \cos\theta}{m_e c}\right)^{-1}.$$

El momento del fotón incidente con $E_0 = 100\,\text{MeV}$ es

$$p_0 = E_0/c = 5{,}344 \times 10^{-20}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

y con los valores $m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg y $\theta = 45°$ obtenemos para el momento lineal del fotón después de la colisión:

$$p_1 = 9{,}164 \times 10^{-22}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

que corresponde a la energía

$$E_1 = p_1 c = 2{,}747 \times 10^{-13}\text{J} = 1{,}715\,\text{MeV},$$

valor que apenas excede el 1 % de E_0. En otras palabras, el fotón transfiere más del 98 % de su energía al electrón durante esta colisión.

La energía que pierde el fotón es transformada en energía cinética del electrón después de la colisión:

$$K = E_0 - E_1 = 98{,}29\ \text{MeV} = 1{,}575 \times 10^{-11}\ \text{J}.$$

Y usando la ecuación (8.1) obtenemos el momento final del electrón:

$$p = \frac{K}{c}\sqrt{1 + \frac{2m_e c^2}{K}} = 5{,}28 \times 10^{-20}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}.$$

Conocidos p_1 y p y utilizando la ley de conservación del momento a lo largo del eje OY, podemos escribir:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{p_1}{p}\operatorname{sen}\theta.$$

Por lo tanto, el ángulo de dispersión del electrón es $\phi \approx 0{,}70°$.

9. **Se observa un electrón con una velocidad de $5{,}0 \times 10^3$ m/s con una incertidumbre del $0{,}003\,\%$. Encontrar la incertidumbre en la determinación de la posición de este electrón.**

SOLUCIÓN

Supongamos que el electrón se mueve en eje OX.

Sabemos por el Principio de Indeterminación de Heisenberg que

$$\Delta p_x\ \Delta x \geq \frac{\hbar}{2},$$

donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

El momento del electrón en el eje OX es

$$p_x = m_e v_x = (9,109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(5{,}0 \times 10^3\ \mathrm{m/s}) = 4{,}56 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg \cdot\ m/s}.$$

La incertidumbre en la estimación del momento será

$$\Delta p_x = (0{,}00003)(4{,}56 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg \cdot m/s}) = 1{,}37 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg \cdot m/s}.$$

Por tanto, la incertidumbre mínima en la estimación de la posición del electrón será

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{1{,}054571818 \times 10^{-34}\mathrm{J \cdot s}}{2(1{,}37 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg \cdot m/s})} = 0{,}386\ \mathrm{mm}.$$

Es interesante darse cuenta de que una estimación tan extraordinariamente precisa del momento del electrón como la que se propone en el

enunciado supone un error en la estimación de su posición realmente enorme. Si tomamos el tamaño de un átomo como 1Å, el error en la estimación sería del orden de 10^7 *átomos. En otras palabras, si lo extrapoláramos al mundo macroscópico y ese electrón fuera del tamaño de una persona, el error en localizarnos en el espacio sería del tamaño de la Tierra.*

10. **Sea una partícula encerrada en un potencial unidimensional independiente del tiempo $U(x)$. Partiendo de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en una dimensión, demostrar que puede hallarse una solución a este problema mediante la ecuación de Schrödinger estacionaria.**

SOLUCIÓN

La ecuación de Schrödinger en una dimensión es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+U(x)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}. \qquad (10.1)$$

Dado que el potencial es independiente del tiempo, se puede aplicar el método de separación de variables proponiendo una solución del tipo $\Psi(x,t)=\psi(x)\varphi(t)$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2[\psi(x)\varphi(t)]}{\partial x^2}+U(x)[\psi(x)\varphi(t)]=i\hbar\frac{\partial[\psi(x)\varphi(t)]}{\partial t}. \qquad (10.2)$$

Aplicando la regla de la cadena en las derivadas se puede comprobar fácilmente que

$$\frac{\partial^2[\psi(x)\varphi(t)]}{\partial x^2}=\varphi(t)\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}=\varphi(t)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2},$$

$$\frac{\partial[\psi(x)\varphi(t)]}{\partial t}=\psi(x)\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}=\psi(x)\frac{d\varphi(t))}{dt}.$$

Así, agrupando términos, la ecuación (10.2) queda como

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+U(x)\psi(x)\right)\varphi(t)=i\hbar\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\psi(x),$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{\psi(x)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+U(x)\psi(x)\right)=\frac{1}{\varphi(t)}i\hbar\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}. \qquad (10.3)$$

Como ambos lados de la Eq.(10.3) dependen de variables distintas, la única manera de que se verifique la igualdad es que ambos lados sean iguales a una constante.

$$\frac{1}{\psi(x)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+U(x)\psi(x)\right)=G, \tag{10.4}$$

$$\frac{1}{\varphi(t)}i\hbar\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}=G. \tag{10.5}$$

A la constante G se le denomina *constante de separación.*

La ecuación (10.5) es trivial si reordenamos los términos:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=-i\frac{G}{\hbar}\varphi,$$

cuya solución es $\varphi(t)=\exp(-i\frac{G}{\hbar}t)$. Esta solución se puede poner en forma trigonométrica aplicando el *teorema de de Moivre*[1].

$$\varphi(t)=\cos\left(2\pi\frac{G}{h}t\right)-i\sin\left(2\pi\frac{G}{h}t\right),$$

donde hemos tenido en cuenta que $\hbar=h/2\pi$. Vemos pues que se trata de la función de una onda cuya frecuencia es $\nu=G/h$. Teniendo en cuenta los postulados de de Broglie-Einstein, la frecuencia de una onda debe ser $\nu=E/h$ (fórmula de Plank $E=h\nu$), así deducimos que la constante G no es otra cosa que la energía de esa onda, $G=E$. De esta manera la ecuación (10.4) quedará:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+U(x)\psi(x)=E\psi(x),$$

que es precisamente la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, esto es, estacionaria.

[1]El teorema de *de Moivre* establece una relación entre la representación exponencial y trigonométrica de variables complejas:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

11. **Sea una partícula cuántica determinada por función de onda**

$$\psi(x,t) = Ae^{-bx^2-i\omega t}.$$

Calcular el valor de A para que la función de onda esté normalizada.

Nota. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

SOLUCIÓN

La norma[2] de la función de onda proporciona la probabilidad de encontrar una partícula en cierta región del espacio en un instante t, $P(x,t) = |\psi(x,t)^2|$. Esta probabilidad debe estar normalizada, lo que significa que la probabilidad de encontrar a la partícula en un punto cualquiera en todo el espacio sea igual a 1:

$$P_{x\in -\infty,\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)^2|dx = 1.$$

La norma de una función en variable compleja se define como el producto $|\psi(x,t)\psi(x,t)^*|$ donde $\psi(x,t)^*$ es el complejo conjugado, esto es $\psi(x,t)^* = Ae^{-bx^2+i\omega t}$. Así tenemos:

$$|\psi(x,t)^2| = |\psi(x,t)\psi(x,t)^*| = Ae^{-bx^2-i\omega t}\cdot Ae^{-bx^2+i\omega t} = A^2e^{-2bx^2}.$$

La integral por tanto será

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)^2|dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^2e^{-2bx^2}dx.$$

Para resolver esta integral introducimos el cambio de variable $y^2 = 2bx^2$ con lo que $dx = (2b)^{-1/2}dy$ y así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)^2|dx = \frac{A^2}{\sqrt{2b}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = A^2\sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

donde hemos tenido en cuenta el resultado de la *Nota* del enunciado.

Como esta integral (probabilidad de encontrar la partícula en todo el espacio) debe ser igual a 1 entonces tenemos

$$A^2\sqrt{\frac{\pi}{2b}} = 1 \qquad \Rightarrow \quad A = \sqrt[4]{\frac{2b}{\pi}}.$$

[2] Aquí norma es el equivalente al módulo de un vector cuando se trata de funciones de cuadrado integrable.

12. **La ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas que describe el movimiento del electrón en un estado esféricamente simétrico del átomo de hidrógeno es:**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)+U(r)\psi=E\psi,$$

donde el potencial es $U(r)=-\dfrac{k_e e^2}{r}$**.**

a) **Demostrar que la función de onda** $\psi_{100}(r)$ **definida como** $\psi_{100}(r)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-r/a_0}$ **es solución de esta ecuación y que la energía vale** $E=-\dfrac{k_e e^2}{2a_0}$**.**

b) **Calcular la función de densidad de probabilidad radial.**

c) **¿Cuál es el valor de** r **más probable?**

SOLUCIÓN:

Usando la función de onda dada, sus derivadas son

$$\frac{d^2\psi_{100}}{dr^2}=\frac{1}{a_0^2}\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-r/a_0}=\frac{1}{a_0^2}\psi_{100}$$

y

$$\frac{2}{r}\frac{d\psi_{100}}{dr}=-\frac{2}{a_0 r}\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-r/a_0}=-\frac{2}{ra_0}\psi_{100}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Schrödinger se tiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a_0^2}-\frac{2}{ra_0}\right)\psi_{100}-\frac{k_e e^2}{r}\psi_{100}=E\psi_{100}.$$

Reordenando términos obtenemos la ecuación

$$\left[\left(\frac{1}{a_0^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right)+\left(\frac{2mk_e e^2}{\hbar^2}-\frac{2}{a_0}\right)\frac{1}{r}\right]\psi_{100}=0,$$

que solo puede verificarse si $\psi_{100}=0$ (solución trivial) o si cada uno de los paréntesis se anulan independientemente.

Del segundo paréntesis podemos obtener el valor de a_0:

$$\frac{2mk_e e^2}{\hbar^2}-\frac{2}{a_0}=0,$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mk_e e^2}.$$

Con a_0 podemos obtener la energía imponiendo que el primer paréntesis se anule:

$$\frac{1}{a_0^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0,$$

$$E = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} = -\frac{k_e e^2}{2a_0},$$

que es justo lo que queríamos desmostrar.

La función densidad de probabilidad radial $P(r)$ será:

$$|\psi_{100}|^2 dV = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} dr = P(r)dr.$$

Así que

$$P(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}.$$

El valor de r para el que se tiene mayor probabilidad coincidirá con el máximo de la función de densidad de probabilidad, esto es, cuando su derivada $\frac{dP(r)}{dr} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= \frac{4}{a_0^3}\left(2re^{-2r/a_0} - \frac{2}{a_0} r^2 e^{-2r/a_0}\right) \\ &= \frac{8}{a_0^3} r e^{-2r/a_0}\left(1 - \frac{r}{a_0}\right), \end{aligned}$$

que sólo puede ser igual a cero si $r = 0$, $r = \infty$ o si el paréntesis se anula. Los dos primeros casos no tienen ningún sentido físico porque eso significaría que la máxima probabilidad de encontrar el electrón sería o en el centro del núcleo o a una distancia infinita del átomo. La única posibilidad es que el paréntesis se anule, lo que conlleva a que

$$r = a_0.$$

La máxima densidad de probabilidad se da justo en el radio de Bohr.

13. **Un fotón de energía inicial $E_i = 3{,}062\ MeV$ interacciona mediante efecto Compton con un electrón. Determinar el ángulo de dispersión del fotón para que su energía final sea un 25 % inferior a la inicial.**

    Dato: $m_e c^2 = 0{,}511\ MeV$.

    SOLUCIÓN:

    En el efecto Compton un fotón de energía E_i interacciona con un electrón cediéndole parte de su energía y siendo dispersado cierto ángulo θ con una energía final E_f. La expresión de la dispersión Compton está dada en la ecuación (6.1).

    Recordando la expresión de Plank que relaciona la energía de un fotón con su longitud de onda $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, podemos reescribir la ecuación de Compton como:

    $$\frac{1}{E_f} - \frac{1}{E_i} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta).$$

    Teniendo en cuenta que $E_f = 0{,}75 E_i = \frac{3}{4} E_i$ llegamos a

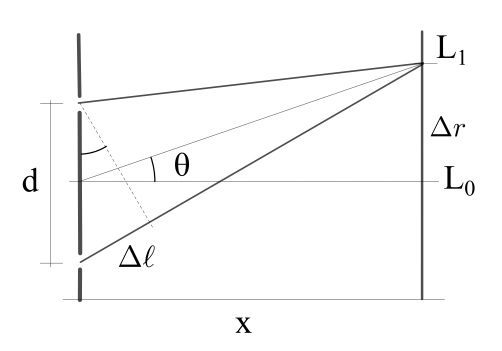
    $$\cos\theta = 1 - \frac{1}{3}\frac{m_e c^2}{E_i}.$$

    Introduciendo los datos numéricos del problema obtenemos $\theta = 19{,}2°$.

14. **En un experimento de doble rendija se usa un haz de electrones monoenergéticos. La separación de las rendijas es $d = 54$ nm y se produce un patrón de franjas en una pantalla situada a una distancia de $x = 1{,}5$ m. Si las dos primeras franjas se encuentran separadas una distancia $\Delta r = 0{,}68$ mm, determinar la energía cinética de los electrones del haz.**

    SOLUCIÓN:

    Para que se produzca una línea en la pantalla, las ondas procedentes de la doble rendija deben estar en fase para que la interferencia sea constructiva.



Cada uno de los rayos que llegan a la primera franja brillante (L_1) recorrerán distancias diferentes.

La condición para que estos rayos lleguen en fase es que la distancia que recorran sea un número entero de veces su longitud de onda:

$$\Delta\ell = n\lambda; \qquad n = 1, 2, 3...$$

Observando la figura vemos que $\Delta\ell = d \sin\theta$ por lo que la condición de máximo de interferencia será

$$d \sin\theta = n\lambda.$$

Hay que tener en cuenta que la distancia de separación entre las líneas es mucho menor que la distancia entre la doble rendija y la pantalla $\Delta r \ll x$ con lo que $\theta \ll 1$. Con esto, podemos aproximar

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\Delta r}{x},$$

y por tanto,

$$\lambda = \frac{d}{n}\frac{\Delta r}{x}.$$

Por otra parte, sabemos que la longitud de onda de de Broglie es $\lambda = \dfrac{h}{p}$ y que la energía del electrón se puede escribir en función de su momento como $E = \dfrac{p^2}{2m_e}$ por lo que

$$E = \frac{h^2 x^2}{2m_e d^2 \Delta r^2}\frac{1}{n^2}.$$

Insertando valores numéricos con $n = 1$ para la primera línea tenemos que la energía de los electrones debe ser:

$$E = 2{,}5 \text{ keV}.$$

CAPÍTULO 5

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA ATÓMICA

En este tema se resuelven problemas derivados de la teoría de Bohr del átomo de hidrógeno, encontrando los niveles energéticos de las series del espectro de este átomo según este modelo. Además, se analizará la función de onda de este átomo en los primeros niveles energéticos resolviendo la ecuación de Schrödinger. Las condiciones frontera de esta ecuación en coordenadas esféricas dan lugar a los tres primeros números cuánticos de un átomo y su interpretación física, conduciendo a explicar la tabla periódica de los elementos químicos.

Modelo de Bohr

Frecuencia del fotón	$h\nu = E_f - E_i$
Cuantización de L	$L = mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, ...$
Radio de Bohr	$a_0 = \frac{\hbar^2}{mk_e e^2} = 0{,}529\text{Å}$
Órbitas de Bohr	$r = n^2 \frac{a_0}{Z}$
E_n del Hidrógeno	$E_n = -\frac{mk_e^2 e^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} = -E_0\frac{Z^2}{n^2}$
E_0 del Hidrógeno	$E_0 \approx 13{,}6eV$

Teoría cuántica del átomo de Hidrógeno

Estado fundamental	$\psi_{1s} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$
Primer estado excitado	$\psi_{2s} = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\dfrac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \dfrac{Zr}{a_0}\right) e^{-Zr/2a_0}$
Densidad de probabilidad radial	$P(r)dr = 4\pi r^2 \|\psi\|^2 dr$

Teoría cuántica de los átomos

Número cuántico principal	$n = 1, 2, 3, ...$
Número cuántico orbital	$\ell = 1, 2, 3, ..., n-1$
Número cuántico magnético	$m_\ell = -\ell, (-\ell+1), ... -1, 0, 1, ...(\ell-1), \ell$
Momento angular orbital	$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$
Componente z del momento angular	$L_z = m_\ell\,\hbar$
Número cuántico de spin	$m_s = \pm\dfrac{1}{2}$
Reglas de selección	$\Delta m_\ell = \{-1, 0, +1\}$ $\Delta\ell = \pm 1$

Problemas

1. **Calcular la longitud de onda de de Broglie de una partícula puntual que se mueve con velocidad $c/100$. Considerar los siguientes casos: a) un electrón; b) un protón; c) una pelotita de masa $m = 0{,}10$ kg; d) la Tierra ($M_T = 6 \times 10^{24}$ kg). Comparar sus resultados con la longitud de onda de la luz visible y con los radios atómicos tomando como valores representativos respectivamente $\lambda_v = 6000$ Å y $a_0 = 0{,}529$ Å**

SOLUCIÓN:

La longitud de onda de *de Broglie* está dada por

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

donde la segunda igualdad es válida únicamente en el régimen de velocidades *no relativistas*. Al sustituir aquí la velocidad $v = c/100$ se obtienen fácilmente los valores pedidos en el enunciado en función de las masas de los objetos:

$$\lambda = \frac{100h}{m} = \frac{2{,}21 \times 10^{-40}}{m}.$$

En la siguiente tabla se presentan los resultados para cada uno de los casos. En la primera columna las masas, en kg, y en la segunda las longitudes de onda, en metros. La tercera y cuarta columna son las comparaciones de los resultados de la segunda columna con la longitud de onda representativa del visible λ_v y con el radio atómico a_0.

	m (kg)	λ (m)	λ/λ_v	λ/a_0
a)	$9{,}1 \times 10^{-31}$	$2{,}43 \times 10^{-10}$	$4{,}05 \times 10^{-4}$	**4,59**
b)	$1836{,}1 m_e$	$1{,}32 \times 10^{-13}$	$2{,}20 \times 10^{-7}$	$2{,}50 \times 10^{-3}$
c)	10^{-2}	$2{,}21 \times 10^{-38}$	$3{,}68 \times 10^{-32}$	$4{,}18 \times 10^{-28}$
d)	6×10^{24}	$3{,}68 \times 10^{-65}$	$6{,}14 \times 10^{-59}$	$6{,}96 \times 10^{-55}$

Observamos que las longitudes de onda de la luz visible son muy grandes comparadas con las longitudes de onda de de Broglie de los objetos

estudiados, incluso de un electrón que se mueve a una velocidad del orden de $c/100$ (o aún mayor). Para los objetos más masivos la longitud de onda de de Broglie resulta despreciable aún en comparación con las dimensiones de los núcleos atómicos (que son del orden de 10^{-5} Å $=$ 10^{-15} m $=$ 1 fm); para dichos cuerpos no se puede esperar detectar algún comportamiento ondulatorio asociado a su movimiento. Esto se hace extensivo a los cuerpos pequeños, con tal de que sigan siendo macroscópicos. Por ejemplo, para una partícula de humo de una micra (1μm) de diámetro y con una masa del orden de 10^{-15} kg moviéndose a una velocidad tan baja como 1 mm/s, resulta $\lambda \approx 6 \times 10^{-6}$ Å, la longitud de onda es de apenas las dimensiones de un núcleo atómico. Sin embargo, para partículas con masa muy pequeña (como un electrón o un nucleón) y velocidades que sean una fracción de la velocidad de la luz, la longitud de onda de de Broglie puede alcanzar valores del orden de las distancias interatómicas, por lo que se observan fenómenos de difracción de tales partículas[1]. Esto se aprecia ya en la última columna de la línea a) del electrón de la tabla anterior.

2. **Comparar las dimensiones de un sistema atómico (representadas por el radio de la primera órbita de Bohr) con la longitud de onda representativa de la luz en el rojo ($\lambda_r = 6500$ Å) y en el azul ($\lambda_a = 4300$ Å) [2]. Calcular la energía adquirida por un electrón acelerado por un potencial de 1 V y determinar su longitud de onda de de Broglie y la de un fotón con esta energía. Comparar estos resultados.**

SOLUCIÓN:

El radio de la primera órbita de Bohr es $a_0 = 0{,}529$ Å. Por lo tanto,

$$\frac{\lambda_r}{a_0} = \frac{6500 \text{ Å}}{0{,}529 \text{ Å}} = 1{,}23 \times 10^4, \qquad \frac{\lambda_a}{a_0} = \frac{4300 \text{ Å}}{0{,}529 \text{ Å}} = 8{,}11 \times 10^3.$$

Estos resultados muestran que la longitud de onda de la luz visible es mucho mayor que las dimensiones atómicas, por un factor del orden de 10^4.

[1] Esto explicaría por ejemplo el experimento de la difracción de electrones por la doble rendija o la difracción de neutrones por cristales

[2] Como curiosidad: estos valores de la longitud de onda están cercanos a las líneas H_α y H_γ de la serie Balmer del espectro del Hidrógeno, respectivamente.

La energía adquirida por un electrón acelerado por un potencial de $V = 1$ V es[3] :

$$E = 1 \text{ eV} = 1{,}602 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Un fotón con esta energía satisface la condición

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 1{,}602 \times 10^{-19} \text{ J},$$

y su longitud de onda es

$$\lambda_{foton} = 1{,}242 \times 10^{-6} \text{ m} = 12420 \text{ Å}.$$

Esta longitud de onda se encuentra en la zona infrarroja lejana del espectro. En cambio, la longitud de onda de de Broglie del electrón con esta misma energía es mucho más pequeña. Para determinarla debemos tener en cuenta la relación entre la energía cinética del electrón $E = \frac{1}{2}m_e v^2 = eV$ y su momento $p = m_e v$.

$$E = \frac{p^2}{2m_e} \qquad \Rightarrow \qquad p = \sqrt{2m_e E} = \sqrt{2m_e eV},$$

por tanto, la longitud de onda de de Broglie para el electrón será:

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} \approx 12{,}3 \text{ Å}.$$

El valor que se obtiene es unas mil veces inferior al correspondiente a la longitud de onda del fotón y próximo a las dimensiones de un átomo.

3. **Siguiendo el modelo atómico de Bohr, calcular la relación de energías resultantes de un electrón en un átomo hidrogenoide al pasar del nivel $n = 2$ al $n = 1$ frente al salto del nivel $n = 3$ al $n = 2$. ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación emitida en esos saltos? ¿A qué series de emisión corresponden? ¿En qué región del espectro caen esas longitudes de onda?**

SOLUCIÓN:

La longitud de onda del fotón emitido (o absorbido) cuando un electrón pasa de un nivel energético n_1 a otro n_2 viene determinada por la ecuación de Rydberg:

[3]Esta es la definición del electronvoltio.

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \tag{3.1}$$

donde R es la constante de Rydberg.

Por otro lado, sabemos que la energía del fotón se relaciona con su longitud de onda mediante la expresión de Plank $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. De esa manera (3.1) se transforma en:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right). \tag{3.2}$$

La relación entre las energías de cada una de las transiciones electrónicas planteadas es:

$$\frac{E_{2\to1}}{E_{3\to2}} = \frac{hcR\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)}{hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = 5{,}4.$$

Esto significa que la energía liberada en una transición entre los niveles $2 \to 1$ es 5,4 veces mayor que la liberada en una transición entre los niveles $3 \to 2$. En el espectro, esto se traduce en que las líneas de la transición $2 \to 1$ aparecen cinco veces más espaciadas que las de la transición $3 \to 2$.

Las longitudes de onda de la radiación emitida en cada transición electrónica serían:

$$\lambda_{2\to1} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)} = \frac{4}{3R} = 1216 \text{ Å},$$

$$\lambda_{3\to2} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = \frac{36}{5R} = 656 \text{ Å}.$$

Cada una de las dos transiciones pertenecen respectivamente a la serie Lyman ($n_2 \geq 2, n_1 = 1$) y Balmer ($n_2 \geq 3, n_1 = 2$) y las longitudes de onda caen en las regiones ultravioleta y visible (roja).

4. **En el espectro de ciertas estrellas se han observado hasta 30 líneas de la serie de Balmer. Calcular, admitiendo el modelo atómico de Bohr, el radio del átomo de Hidrógeno en la órbita $n = 30$, así como la velocidad que tendría el electrón en esa órbita.**

SOLUCIÓN:

Siguiendo el modelo de Bohr, la fuerza centrípeta que mantiene al electrón en órbita es la fuerza coulombiana (electrostática)

$$F_{\text{centrípeta}} = F_{\text{Coulomb}},$$

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

de donde podemos despejar la velocidad:

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}. \tag{4.1}$$

Por otro lado, de acuerdo con el Tercer Postulado de Bohr, el momento angular del electrón en el átomo está cuantizado y vale $L = mvr = n\hbar$, con lo que

$$v = \frac{n\hbar}{mr}.$$

Insertando esta expresión en la ecuación (4.1) y despejando obtenemos el radio del átomo en función de n y Z:

$$r = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}\frac{n^2}{Z} = \frac{\hbar^2}{k_e m_e e^2}\frac{n^2}{Z} = a_0\frac{n^2}{Z}.$$

El cálculo de este valor para r puede hacerse fácilmente a partir del valor de a_0 (dado en el Anexo A). Así, para el átomo de Hidrógeno del problema, con $Z = 1$ y $n = 30$, el radio sería:

$$r = a_0\frac{30^2}{1} = 480 \text{ Å}.$$

Una vez hallado el radio del átomo podemos usarlo en la ecuación (4.1) para obtener la velocidad del electrón.

$$v = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}} = 7{,}3 \times 10^4 \text{ m/s}.$$

5. **La función de onda del estado fundamental del electrón de un átomo de Hidrógeno es:**

$$\psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0},$$

donde r es la coordenada radial del electrón y a_0 el radio de Bohr. Demostrar que esta función de onda está normalizada.

Nota: $\int_0^\infty x^n e^{-cx} dx = \frac{n!}{c^{n+1}}$.

SOLUCIÓN:

La probabilidad de encontrar una partícula en todo el volumen V es:

$$P(V) = \int_V |\psi(x,y,z)^* \psi(x,y,z)| dV = \iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,y,z)|^2 dx\, dy\, dz,$$

donde hemos tenido en cuenta que en este caso la función de onda es real ($\psi \in \mathbb{R}$) y por tanto es igual a su complejo conjugado: $\psi^* = \psi$.

Por otra parte, ya que ψ_{1s} es función de r en lugar de $\{x, y, z\}$, debemos escribir el diferencial de volumen dV a coordenadas esféricas:

$$dV = dx\, dy\, dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi,$$

y así

$$\begin{aligned}
\int_V |\psi|^2 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |\psi|^2\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \\
&= 4\pi \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \right)^2 r^2\, dr \\
&= \frac{4}{a_0^3} \int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0}\, dr.
\end{aligned}$$

Esta última integral puede resolverse usando la solución dada en la *Nota* del problema con $n = 2$ y $c = 2/a_0$:

$$\int_V |\psi|^2 dV = \frac{4}{a_0^3} \frac{2}{(2/a_0)^3} = 1,$$

con lo que hemos demostrado que la función de onda ψ_{1s} está normalizada.

6. **Calcular el valor más probable y el valor promedio de r para un electrón en el estado fundamental del átomo de Hidrógeno gobernado por la función de onda del ejercicio anterior ψ_{1s}. ¿Cuál sería la probabilidad de encontrar a este electrón con una r mayor que el radio de Bohr a_0?**

   Nota: $\int_0^{\infty} x^n e^{-cx} dx = \frac{n!}{c^{n+1}}$

   SOLUCIÓN:

   Siguiendo el razonamiento del ejercicio anterior, la probabilidad de encontrar el electrón en un volumen esférico V de radio R será:

$$P(V) = \int_V |\psi^2| dV = \int_0^R 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 \, dr.$$

   De la última integral podemos definir un importante concepto matemático de gran utilidad en estadística, termodinámica y química cuántica. Para ello debemos entender que el integrando $4\pi r^2 |\psi(r)|^2 \, dr$ es la probabilidad de encontrar el electrón en una superficie esférica de radio r y espesor dr. Podemos renombrar esta cantidad como:

$$p(r)dr = 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 \, dr,$$

   de lo que se deduce que $p(r) = 4\pi r^2 |\psi(r)|^2$ mide la probabilidad por unidad de distancia radial de encontrar al electrón en una capa esférica de radio r y espesor dr. Esta función se denomina *función densidad de probabilidad*.

   Introduciendo el valor de ψ_{1s} en la expresión anterior tenemos que la *función densidad de probabilidad* para el electrón en el estado fundamental del Hidrógeno es:

$$p_{1s}(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}.$$

   Para hallar el máximo de esta función no tendremos más que encontrar la distancia r para la cual su derivada dp_{1s}/dr se anula.

$$\begin{aligned} \frac{dp_{1s}}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right) e^{-2r/a_0}\right] &= 0, \\ e^{-2r/a_0} \frac{d}{dr}(r^2) + r^2 \frac{d}{dr}(e^{-2r/a_0}) &= 0, \\ 2re^{-2r/a_0} - (2/a_0) r^2 e^{-2r/a_0} &= 0, \\ 2r[1 - (r/a_0)] e^{-2r/a_0} &= 0. \end{aligned}$$

Es evidente que esta ecuación se verifica únicamente cuando la expresión contenida entre los corchetes se anula:

$$1 - (r/a_0) = 0,$$

y por tanto

$$r = a_0.$$

De aquí deducimos que la distancia *más probable* donde se podría encontrar el electrón coincide con el primer radio de Bohr a_0.

Ahora bien, sabemos que el electrón se puede encontrar en cualquier punto en una *especie* de nube alrededor del núcleo cuya forma viene determinada por la función densidad de probabilidad $p(r)$. Aunque hemos visto que la distancia más probable es a_0 la forma asimétrica de esta función provocará que la distancia media $\langle r \rangle$ no coincida con a_0.

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int r\, p(r) dr = \int_0^\infty r \left(\frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} \right) dr \\ &= \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/a_0} dr. \end{aligned}$$

Usando la solución dada en la *Nota* del enunciado para $n = 3$ tenemos:

$$\langle r \rangle = \frac{4}{a_0^3} \left(\frac{3!}{(2/a_0)^4} \right) = \frac{3}{2} a_0.$$

Como se puede ver, el valor medio $\langle r \rangle$ es mayor que el valor más probable a_0 donde encontraríamos al electrón. *¿Cuál sería la varianza de esta medida?*[4]

Se deja la última parte del problema como ejercicio para el lector.

[4]La varianza en estadística se define como $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$.

7. **¿Cuántos conjuntos de números cuánticos son posibles para un átomo de Hidrógeno en el cual a)** $n = 1$**, b)** $n = 2$**, c)** $n = 3$**, d)** $n = 4$ **y e)** $n = 5$**? Verificar los resultados para demostrar que están de acuerdo con la regla general de que el número de conjuntos de números cuánticos para una capa es igual a** $2n^2$**.**

SOLUCIÓN:

Siguiendo las reglas de los número cuánticos tenemos que los valores que cada uno pueden tomar son:

Número cuántico principal $n = \{1, 2, 3, ...\}$.

Número cuántico orbital $\ell = \{0, 1, 2...n - 1\}$.

Número cuántico magnético $m_\ell = \{-\ell, \cdots, \ell\}$.

Spin $m_s = \{-1/2, +1/2\}$.

Por tanto para cada caso del problema tenemos:

a) $n = 1$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$, $m_s = \{-1/2, +1/2\}$.

n	ℓ	m_ℓ	m_s
1	0	0	$+1/2$
1	0	0	$-1/2$

Total de estados = 2.

b) $n = 2$, $\ell = \{0, 1\}$, $m_\ell = \{-1, 0, 1\}$, $m_s = \{-1/2, +1/2\}$.

n	ℓ	m_ℓ	m_s
2	0	0	$+1/2$
2	0	0	$-1/2$
2	1	-1	$+1/2$
2	1	-1	$-1/2$
2	1	0	$+1/2$
2	1	0	$-1/2$
2	1	1	$+1/2$
2	1	1	$-1/2$

Total de estados = 8.

Los siguientes casos se dejan como ejercicio ya que siguen la misma metodología

8. **Sea un átomo de Hidrógeno en el estado cuántico $\ell = 3$. Calcular la magnitud del momento angular electrónico $\vec{\mathbf{L}}$, los valores permitidos de L_z, y los correspondientes ángulos θ que $\vec{\mathbf{L}}$ forma con el eje Z.**

SOLUCIÓN:

La expresión general para la cuantización del momento angular electrónico en función de su número cuántico orbital ℓ es:

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar,$$

por lo que para $\ell = 3$ tenemos

$$L = 2\sqrt{3}\hbar.$$

Los valores permitidos para el momento angular L_z pueden obtenerse a partir de los valores permitidos del número cuántico magnético orbital $L_z = m_\ell \hbar$. Para nuestro caso, estos números permitidos son $m_\ell = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Por tanto:

$$L_z = \{-3\hbar, -2\hbar, -\hbar, 0\,\hbar, 2\hbar, 3\hbar\}.$$

Los ángulos que forma el momento angular $\vec{\mathbf{L}}$ respecto al eje Z se pueden hallar con:

$$\cos\theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}.$$

Insertando datos numéricos se tiene finalmente:

$$\theta = \{30{,}0°, 54{,}7°, 73{,}2°, 90{,}0°, 107°, 125°, 150°\}.$$

CAPÍTULO 6

FÍSICA NUCLEAR

En este capítulo se resuelven problemas relacionados con las partículas componentes de núcleo, así como de las reacciones que se dan en el mismo, con especial hincapié en las desintegraciones nucleares, tan importantes en muchos aspectos del mundo que nos rodea.

Propiedades de las partículas subatómicas

Partícula	Carga	Masa	Número
Protón	$+e$	938,3 MeV/c^2	Z
Neutrón	0	939,6 MeV/c^2	$N = A - Z$
Electrón	$-e$	0,511 MeV/c^2	Z

Propiedades nucleares

Isótopos	$= Z; \quad \neq A$
Tamaño	Proporcional a A
Radio	$R = R_0 A^{1/3} \approx (1{,}5 \text{ fm}) A^{1/3}$

Radiactividad

Ley de desintegración	$N = N_0 e^{-\lambda t}$
Actividad	$A = \lambda N = A_0 e^{-\lambda t}$
Tiempo de vida media	$\tau = \dfrac{1}{\lambda}$
Periodo de semidesintegración	$t_{1/2} = T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

Reacciones nucleares

Energía de enlace	$E_b = \left(Z m_{\mathrm{p}} + N m_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{nucleo}}\right) c^2$
Valor Q	$Q = -(\Delta m) c^2$
Reacción exotérmica	$Q > 0$
Reacción endotérmica	$Q < 0 \quad \rightarrow \lvert Q \rvert$ (umbral de energía)

Problemas

1. **El neutrón, cuando se aísla de un núcleo atómico, decae en un protón, un electrón y un antineutrino de la siguiente manera:**

$$n \to {}^{1}\mathrm{H} + e^{-} + \bar{\nu}.$$

Una manera de determinar la energía cinética de los neutrones es a través de la denominada *temperatura neutrónica* que se obtiene a través de la energía térmica definida como $E_{term} = k_B T$, donde k_B es la constante de Boltzmann, y que representa la energía cinética promedio de un haz de neutrones.

   ***a*) Calcular la energía de un neutrón térmico a 25^oC en Julios y en eV.**

   ***b*) ¿Cuál es la velocidad de este neutrón térmico?**

   ***c*) Un haz de neutrones térmicos monoenergéticos se produce a 25^oC y tiene una intensidad I. Después de viajar 1350 km, el haz tiene una intensidad de $1/2I$. Estimar el periodo de semidesintegración y la vida media del neutrón. Expresar la respuesta en minutos.**

SOLUCIÓN

a) La energía térmica del neutrón según la definición dada en el enunciado es $E_{term} = k_B T$ siendo $k_B = 1{,}381 \times 10^{-23}$ J/K y T la temperatura dada en Kelvins. Así, a una temperatura de $T = 25°$ C $= 298$ K:

$$E_{\mathrm{term}} = 4{,}11 \times 10^{-21} \text{ J}.$$

Usando el factor de conversión de la energía $1\text{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}$J,

$$E_{\mathrm{term}} = 2{,}57 \times 10^{-2} \text{ eV} = 25{,}7 \text{ meV}.$$

b) Como se trata de encontrar la velocidad de un único neutrón térmico, la energía térmica es exactamente la energía cinética del neutrón. Así,

$$E_{\mathrm{term}} = E_c = \frac{1}{2} m_n v^2,$$

de donde se puede obtener:

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\text{term}}}{m_n}} = \sqrt{\frac{2(4{,}11 \times 10^{-21})\ \text{J}}{1{,}673 \times 10^{-27}\ \text{kg}}} = 2{,}22\ \text{km/s}.$$

c) La periodo de semidesintegración es el tiempo en el que la cantidad inicial de neutrones se reduce a la mitad. Si se nos indica que la intensidad del haz se reduce a la mitad cuando ha recorrido una distancia de 1350 km entonces podemos obtener ese tiempo conociendo su velocidad. Como el haz es monoenergético, todos los neutrones tienen la misma energía, y por ende, la misma velocidad, por lo tanto el tiempo buscado es:

$$t_{1/2} = \frac{x}{v} = \frac{1350\ \text{km}}{2{,}2\ \text{km/s}} = 608\ \text{s} = 10{,}1\ \text{min}.$$

Por otra parte, el tiempo de vida media es la duración promedio de una partícula radiactiva en la muestra. Su evaluación es la siguiente

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t dN = -\int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Como sabemos que $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ entonces

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} = 14,5\ \text{min}.$$

2. **Considerar el siguiente proceso de fisión:**

$$^{235}_{92}\text{U} + n \rightarrow {}^{95}_{37}\text{Rb} + {}^{137}_{55}\text{Cs} + 4n.$$

Determinar la energía potencial electrostática en MeV de los productos de la reacción cuando las superficies del núcleo ^{95}Rb y ^{137}Cs se tocan inmediatamente después de formarse durante el proceso de fisión.

SOLUCIÓN

Los núcleos, al estar compuestos por protones y neutrones, se repelen con una fuerza que es proporcional a su carga e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Esta es la fuerza de Coulomb:

$$F(r) = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

siendo $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} = 9{,}988 \times 10^{10}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$.

Por otro lado, sabemos que la energía potencial en un punto r se define como el trabajo para llevar la carga desde el infinito hasta ese punto.

$$U = -\int_{\infty}^{r} F(r)\, dr = k_e \frac{q_1 q_2}{r}.$$

La carga neta de un núcleo no es más que el número de protones por la carga elemental, esto es, Ze. Además, sabemos que el número de nucleones por unidad de volumen en el núcleo es constante:

$$\frac{A}{V} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \mathrm{cte},$$

con lo que el radio del núcleo es:

$$R = R_0 A^{1/3},$$

donde $R_0 = 1{,}2$ fm.

Considerando que las cargas estuvieran concentradas en los centros de cada núcleo, la distancia entre ellas será la suma de los radios de los núcleos, esto es, $R = R_{Rb} + R_{Cs}$ donde $R_{Rb} = R_0 A_{Rb}^{1/3}$ y $R_{Cs} = R_0 A_{Cs}^{1/3}$. Así la energía será:

$$U = k_e \frac{(Z_{Rb} e)(Z_{Cs} e)}{R_{Rb} + R_{Cs}} = k_e e^2 \frac{Z_{Rb} Z_{Cs}}{R_0 (A_{Rb}^{1/3} + A_{Cs}^{1/3})}.$$

Introduciendo los datos se obtiene finalmente $U = 0{,}25$ GeV.

3. **El Plutonio es muy tóxico para el ser humano. Una vez que entra en el organismo, se acumula principalmente en la médula ósea, donde se sintetizan los glóbulos rojos. El isótopo ^{239}Pu es un emisor alfa que tiene un periodo de semidesintegración de 24360 años. Debido a que las partículas alfa son radiación ionizante, la capacidad de producción de sangre de la médula**

es destruida con el tiempo por la presencia del ^{239}Pu. Además, muchos tipos de cáncer también se desarrollarán en los tejidos circundantes. Si una persona accidentalmente ingirió $2{,}0\mu g$ de ^{239}Pu y todo fue absorbido por los huesos, ¿Cuántas partículas alfa se producen por segundo en el cuerpo de esta persona? ¿Cuánto tiempo debería transcurrir para que la actividad sea de 1000 partículas por segundo?

Dato: $M_{Pu} = 239$ *gr/mol.*

SOLUCIÓN

La actividad de la muestra de Plutonio es igual a la cantidad de núcleos radiactivos presentes multiplicado por la constante de desintegración, esto es:

$$A(t) = \lambda N(t),$$

siendo

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t),$$

o en otras palabras:

$$A(t) = A_0 \exp(-\lambda t).$$

La constante de desintegración se puede obtener a partir del perido de semidesintegración (en segundos):

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 9{,}016 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1}.$$

Obtenemos ahora el número inicial de núcleos de Plutonio presentes en la muestra usando para ello su masa molar y el número de Avogadro.

$$N_0 = \frac{m_{\text{muestra}}}{M_{Pu}} N_A,$$

$$N_0 = \frac{2 \times 10^{-6} \text{ gr}}{239 \text{ gr/mol}} 6{,}022 \times 10^{23} = 5{,}035 \times 10^{15} \text{ núcleos}.$$

La actividad inicial de la muestra ingerida será:

$$A_0 = \lambda N_0 = 4{,}5 \times 10^3 \text{ Bq}.$$

El tiempo que debe transcurrir para que la actividad sea de 10^3 núcleos/s se obtendrá de la ecuación general de la actividad sin más que despejar t e insertar valores numéricos:

$$t = \frac{\ln(A/A_0)}{-\lambda} = 5{,}3 \times 10^4 \text{ años.}$$

Como se puede ver, el tiempo que debemos esperar para que la actividad final sea de 1000 partículas por segundo (esto es, 4,5 veces menor que la inicial) es de 53000 años. Si tenemos en cuenta que la primera civilización humana, la Antigua Mesopotamia, surgió hace *tan solo* unos 5500 años, nos damos cuenta que este tiempo es realmente grande.

4. **El isótopo ^{239}Pu decae mediante desintegración alfa al isótopo ^{235}U. Si las masas de ^{239}Pu, ^{235}U y α son 239,052156 u, 235,043923 u y 4,002803 u, respectivamente, calcular las energías cinéticas de la partícula alfa y del núcleo hijo en retroceso.**

SOLUCIÓN

Podemos plantear la ecuación del balance energético teniendo en cuenta la equivalencia masa-energía y que los números atómicos y másico deben conservarse en la reacción:

$$^{239}_{94}\text{Pu} \rightarrow {}^{235}_{92}\text{U} + {}^{4}_{2}\alpha + Q,$$

donde $Q = -(\Delta m)c^2$ es la *energía equivalente* de la diferencia de masas Δm entre reactivos y productos, cuyo valor será:

$$Q = [m_{Pu} - (m_U + m_\alpha)]c^2 \left(\frac{931{,}5 \text{ MeV/c}^2}{\text{u}} \right) = 5{,}24 \text{ MeV.}$$

Esta energía es la suma de las energías cinéticas de los productos, considerando nula la energía cinética inicial del núcleo reactivo:

$$Q = T_U + T_\alpha.$$

Por la conservación del momento lineal, $p_{Pu} = p_U + p_\alpha$, y suponiendo que el momento inicial del reactivo es nulo $p_{Pu} = 0$, los dos productos saldrán en direcciones opuestas, de forma que en valor absoluto:

$$p_U = p_\alpha.$$

Si además tenemos en cuenta que el momento lineal en términos de la energía cinética es $p = mv = \sqrt{2mT}$, entonces es fácil llegar a:

$$m_U T_U = m_\alpha T_\alpha.$$

Operando con esta expresión:

$$T_U = \frac{m_\alpha}{m_U} T_\alpha,$$

$$T_U + T_\alpha = \left(\frac{m_\alpha}{m_U} + 1 \right) T_\alpha,$$

$$T_\alpha = \left(\frac{m_U}{m_U + m_\alpha} \right) Q \qquad ; \qquad T_U = Q - T_\alpha = \left(\frac{m_\alpha}{m_U + m_\alpha} \right) Q.$$

Aunque en rigor la energía depende de las masas atómicas de los isótopos, en la práctica es posible aproximar mediante los números másicos simplificando los cálculos:

$$T_\alpha = \left(\frac{A-4}{A} \right) Q \qquad ; \qquad T_U = \frac{4}{A} Q,$$

donde A es el número atómico del $^{239}_{94}$Pu. Se puede ver en estas expresiones que la mayoría de la energía cinética se la lleva la partícula α. Introduciendo valores numéricos se obtiene finalmente $T_\alpha = 5{,}15$ MeV y $T_U = 89{,}2$ keV.

5. **Calcular la energía de la desintegración Q en MeV del decaimiento**

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow \, ^{14}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e,$$

sabiendo que las masas atómicas de ^{14}C y ^{14}N son $14{,}003242u$ y $14{,}003074u$ respectivamente.

SOLUCIÓN

La energía de la desintegración puede calcularse teniendo en cuenta la equivalencia entre masa y energía de Einstein. La diferencia de masa entre los núcleos iniciales y finales de una desintegración es la energía que se libera en la reacción:

$$Q = -(\Delta m)c^2.$$

Despreciando la masa del electrón y del antineutrino frente a la masa de los núcleos se tiene:

$$\Delta m = m_f - m_i = m(^{14}\mathrm{N}) - m(^{14}\mathrm{C}) = -0{,}000168 \text{ u}.$$

Así, la energía de la reacción será:

$$Q = -(-0{,}000168\ \mathrm{u})c^2 \left(\frac{931{,}5\ \mathrm{MeV/c^2}}{\mathrm{u}}\right) = 0{,}156\ \mathrm{MeV}.$$

6. **Se mide la actividad de cierta muestra radiactiva. Pasados** 14 **días se mide de nuevo detectando esta vez la cuarta parte de la actividad inicial. Calcular el periodo y la constante de desintegración.**

   SOLUCIÓN

   El periodo de semidesintegración es el tiempo que tarda una muestra en reducir su número a la mitad. Por tanto, si pasados 14 días se ha reducido a la cuarta parte, esto indica que debe haber pasado dos periodos, de lo que se concluye que:

   La constante de desintegración será por tanto:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 9{,}9 \times 10^{-2}\ \text{días}^{-1} = 6{,}048 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

7. **Una muestra de un radionúclido contiene** $1{,}2 \times 10^9$ **núcleos. La constante de desintegración de este isótopo es** $2{,}7726 \times 10^{-3}$ **años**$^{-1}$**. ¿Cúanto tiempo debe pasar para tener una cantidad de** $1{,}5 \times 10^8$ **núcleos?**

   SOLUCIÓN

   El primer paso para responder a esta pregunta es obtener el periodo de desintegración que por definición es:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda},$$

   por lo que $T = 250$ años.

   Para obtener el tiempo que debe pasar sólo tenemos que saber qué cantidad de núcleos debe desintegrarse, esto es, la relación entre número inicial y final de núcleos:

$$\frac{N_f}{N_i} = \frac{1{,}5 \times 10^8}{1{,}2 \times 10^9} = \frac{1}{8}.$$

   Sabemos que en cada periodo la muestra reduce su número en la mitad, por lo tanto, el tiempo para que se vea reducida en $1/8 = 1/2^3$ debe ser $t = 3T$, esto es, 750 años.

8. **Una muestra contiene inicialmente 10^{20} átomos, de los cuales un $20\,\%$ corresponde a un material radiactivo con un periodo de $T = 13$ años. Calcular:**

   a) **La constante de desintegración.**

   b) **Número de átomos radiactivos iniciales y la actividad inicial de la muestra.**

   c) **El número de átomos radiactivos y la actividad al cabo de 50 años.**

SOLUCIÓN

La constante de desintegración es

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 0{,}053 \text{ años}^{-1} = 1{,}691 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}.$$

Para obtener la actividad inicial primero debemos tener en cuenta que el número inicial de núcleos radiactivos es el $20\,\%$ del total, esto es, $N_0 = 2 \times 10^{19}$. Así, la actividad inicial será:

$$A_0 = \lambda N_0 = 3{,}38 \times 10^{10} \text{ Bq} = 0{,}91 \text{ Ci}.$$

El número de átomos radiactivos al cabo de $t = 50$ años puede hallarse mediante la ley de desintegración:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T}t\right) = 2\times10^{19} \exp\left(-\frac{\ln 2}{13}50\right) = 1{,}39\times10^{18} \text{ núcleos}.$$

Y la actividad:

$$A(t) = A_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T}t\right) = 3{,}38\times10^{10} \exp\left(-\frac{\ln 2}{13}50\right) = 2{,}35\times10^{9} \text{ Bq}.$$

Como se puede ver, hemos usado el periodo y el tiempo directamente en *años* por simplicidad. Se puede comprobar que si se realiza la transformación a segundos debe dar el mismo resultado.

9. **La prueba del Carbono-14 para datar tejidos orgánicos se basa en la medición de la cantidad de este isótopo radiactivo en la muestra estudiada. De forma natural, el cuerpo humano**

va incorporando pequeñas cantidades de este isótopo en sus tejidos a través de los alimentos, compensando los átomos que se desintegran y manteniendo su número constante a lo largo de toda su vida. Cuando la persona muere, deja de alimentarse y, por ende, de incorporar nuevos átomos este isótopo. En un sarcófago se ha descubierto una momia en la que su cantidad de ^{14}C es $2/5$ inferior a la cantidad típica encontrada en un ser humano vivo. Sabiendo que el periodo de semidesintegración del ^{14}C es $T = 5730$ años, calcular el año en el que se enterró la momia.

SOLUCIÓN

Como es ya bien sabido, el número de núcleos radiactivos que quedan en función del tiempo es:

$$N_f(t) = N_i \exp\left(-\frac{\ln 2}{T} t\right).$$

Si se ha detectado una cantidad $2/5$ inferior a la cantidad típica quiere decir que sólo queda $3/5$ de la inicial, esto es, $N_f = \frac{3}{5} N_i$. Así, sustituyendo N_f tenemos:

$$\frac{3}{5} = \exp\left(-\frac{\ln 2}{T} t\right),$$

de donde podemos despejar el tiempo que ha transcurrido[1].

$$t = \frac{\ln(3/5)}{\ln 2}\, T = 4223 \text{ años}.$$

Por lo tanto, si restamos el año actual (2023 d.C.), podemos concluir que la momia se enterró, aproximadamente, en el año 2200 a.C.

[1] Recordando la propiedad de los logaritmos: $\log(1/x) = -\log(x)$

APÉNDICE A

CONSTANTES E IDENTIDADES

Unidades

Masa	$1 \text{ u} = 1{,}66054 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931{,}49 \text{ MeV}/c^2$
Energía	$1 \text{ eV} = 1{,}602177 \times 10^{-19} \text{ J}$

Constantes físicas

Cte de Stefan	$\sigma = 5{,}667 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$
Cte de Boltzmann	$k = 1{,}3805 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Cte h de Plank	$h = 6{,}62607 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $= 4{,}13567 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$
Cte $\hbar$ de Plank	$\hbar = h/2\pi = 1{,}05457 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $= 6{,}582119 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$
Velocidad de la luz	$c = 2{,}99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$
Cte hc	$hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$
Cte de Rydberg	$R = 1{,}097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$
Cte eléctrica	$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9{,}988 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$
Radio de Bohr	$a_0 = 0{,}529 \text{ Å}$
Numero de Avogadro	$N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$

Propiedades físicas

Masa del protón	$m_p = 1{,}67262 \times 10^{-27}$ kg $= 938{,}27$ MeV$/c^2$
Masa del neutrón	$m_n = 1{,}67492 \times 10^{-27}$ kg $= 939{,}56$ MeV$/c^2$
Masa del electrón	$m_e = 9{,}10938 \times 10^{-31}$ kg $= 0{,}5110$ MeV$/c^2$
Carga del electrón	$e = 1{,}60218 \times 10^{-19}$ C

Momentos de inercia

Cilindro hueco respecto a su eje	$I = MR^2$
Cilindro sólido respecto a su eje	$I = \frac{1}{2}MR^2$
Cilindro hueco de pared gruesa a su eje	$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
Cilindro hueco respecto a un diámetro que pasa por su centro	$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Cilindro sólido respecto a un diámetro que pasa por su centro	$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Barra delgada respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro	$I = \frac{1}{12}ML^2$
Barra delgada respecto a un eje perpendicular que pasa por un extremo	$I = \frac{1}{3}ML^2$
Esfera hueca respecto al diámetro	$I = \frac{2}{3}MR^2$
Esfera sólida respecto al diámetro	$I = \frac{2}{5}MR^2$

Identidades

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\log(1/x) = -\log(x)$

Integrales

$$\int_0^\infty x^n e^{-cx}dx = \frac{n!}{c^{n+1}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2x^2}dx = \frac{1}{a}\sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-a^2x^2}dx = \frac{1}{2a^3}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$$

colec

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

manu

121

ÍNDICE